SÉRIE A, N° 4466
N° D'ORDRE : 5314

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Dominique FOATA

PREMIÈRE THÈSE

Étude algébrique de certains problèmes d'Analyse Combinatoire et du Calcul des Probabilités

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Les Spineurs

Soutenues le 12 mars 1965 devant la Commission d'examen

MM. A.	LICHNEROWICZ	Président
D.	DUGUÉ	Examinateurs
R.	FORTET	
M. P.	SCHÜTZENBERGER	

SÉRIE A, N· 4466
N· D'ORDRE : 5314

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Dominique FOATA

PREMIÈRE THÈSE

Étude algébrique de certains problèmes d'Analyse Combinatoire et du Calcul des Probabilités

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Les Spineurs

Soutenues le 12 mars 1965 devant la Commission d'examen

MM. A.	LICHNEROWICZ	Président
D.	DUGUÉ	Examinateurs
R.	FORTET	
M. P.	SCHÜTZENBERGER	

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen.... M. ZAMANSKY

MM.	BRELOT	T Analyse supérieure
	PRENANT	T Anatomie et histologie comparée
	GRASSE	T Evolution des êtres organisés
	PREVOST	T Chimie Organique
	WYART	T Minéralo & Cristallo
	TEISSIER	T Zoologie
	MANGENOT	T Biologie végé. (Orsay)
	AUGER	T Physique quantique et relativité
	MONNIER	T Physiologie générale
	PIVETEAU	T Paléontologie
	ROCARD	T Physique ENS
	CARTAN	T Mathématiques ENS
	LAFFITTE N.	T Chimie générale
	COULOMB	T Physique du globe
Mlle	COUSIN	T Biologie animale SPCN
	CHRETIEN	T Chimie minérale
	BOCQUET	T Zoologie
	KASTLER	T Physique ENS
	EPHRUSSI	T Génétique
	RIVIERE	T Géologie SPCN & Sédiment (Orsay)
	GAUTHERET	T Biologie végétale PCB
	LUCAS R.	T Recherches Physiques
	TOHMAS A	T Biologie cellulaire
	ARNULF	T Optique appliquée
	MORAND	T Physique enseignement
	SOLEILLET	T Physique PCB
	FORTIER	T Mécanique exp. des fluides
	DRACH	T Zoologie
	QUENEY	T Météo & Dynamique atmos.
	GALLIEN	T Embryologie
	EICHORN	T Botanique
	DE CUGNAC	T Biologie végétale SPCN
Mlle	CAUCHOIS	T Chimie physique
	THELLIER	T Physique du globe
	L'HERITIER	T Biologie générale Orsay ,
	GRIVET	T Radioélectricité Orsay
	PONCIN	T Mécanique générale
	DU BREIL	T Arith.& Théorie des nombres
	QUELET	T Chimie organique
	GAGNIARD	T Géophysique appliquée
	CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire
	CUVILLIER	T Micropaléontologie
	JUNG	T Géologie
	TRILLAT	T Microscopie et diffraction électro.
	WIEMANN	T Chimie organ. & struc.
	JACQUINOT	T Spectroscopie et Physique céleste (Orsay)
	VASSY	T Physique de l'atmosphère
	DESTOUCHES	T Théorie physique
	AMIEL	T Chimie générale
	HOCART	T Minéralo. & Cristallo.
	MATHIEU J. P	T Physique optique
	COUTEAUX	T Cytologie
	MAY	T Zoologie
	CHOQUET	T Théorie des fonctions et topologie
	FELDMANN	T Biologie végétale marine
	GUINIER	T Physique des solides (Orsay)
	JOST	T Physiologie comparée
	FORTET	T Calcul des probabilités et Phys. Mathém.
	SCHWARTZ	T Calcul diff. & Intégral
	CHOUARD	T Physiologie végétale
	MALAVARD	T Aviation (Tech. Aéron.)
	NORMANT	T Synthèse organique
	BENARD	T Chimie minérale
	BUVAT	T Botanique ENS
	DUGUE	T Statistique mathématiques
	SOULAIRAC	T Psychophysiologie
	ULRICH	T Physiologie Vég. Appl.
	MARECHAL	T Optique théor. & appl.
	KIRRMANN	T Théories chimiques
	CHADEFAUD	T Botanique
Mlle	LE BRETON	T Physiol. de la nutrition
	LELONG	T Application de l'analyse à la géométrie
	DEVILLIERS	T Anatomie & Histo.compar.
	EHRESMANN	T Topologie algébrique
	FRANCON	T Physique SPCN
	GLANGEAUD	T Géographie phys. & géol.
	GODEMENT	T Mathématiques MGP
	PISOT	T Technique math. de la phys.
	ROCH	T Géologie
	SCHATZMANN	T Astrophysique
	TERMIER	T Géologie générale
	ZAMANSKY	T Mathématiques générales
	LENNUIER	T Physique MGP
	RIZET	T Génétique Orsay
	ROUTHIER	T Géologie appliquée
Mme	TONNELAT	T Physique théorique
	DIXMIER	T Mathématiques MPC
	SOUCHAY	T Chimie générale
	AIGRAIN	T Electrotechnique générale
	BRUSSET	T Chimie systématique
	LEVY M.	T Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
Mme	CHAIX	T Chimie biologique
Mme	HUREL PY	T Biologie végétale PCB
	PANNETIER	T Chimie générale
	BRUN	T Mécanique des fluides I
	LEDERER	T Chimie biologique (Orsay)
Mme	DUBREIL	T Mathématiques (Agrég.)
Mme	LELONG	T Mathématiques II ENS
	BELLAIR	T Géologie SPCN
	COTTE	T Physique électricité
	DUBOIS J.E.	T Chimie organique
	LAMOTTE	T Zoologie ENS
	MICHEL A.	T Chimie minérale Orsay
	OLMER	T Energétique générale
	ROUAULT	T Electricité (Orsay)
	GAUTHIER	T Mécanique appliquée
	BARCHEWITZ	T Chimie physique
	BROSSEL	T Physique atomique
	BUSER	T Physiologie comparée
	CAMUS	T Physiologie végétale
	CASTAING	T Physique II Thermo (Orsay)
	CURIEN	T Minéralo & cristal.
	MOYSE	T Physiologie végétale (Orsay)
Mme	CHARNIAUX-COTTON	T Evolution des êtres organisés
	POSSOMPES	T Zoologie
	PULLMANN	T Chimie quantique
	TEILLAC	T Physique Nucl. & radioactivité (Orsay)
	TONNELAT	T Biol. Physico-chim.(Orsay)
	VILLE	T Econométrie
	WILLEMART	T Chimie PCB
	DODE	T Chimie (Orsay)
	FREYMANN	T Recherches physiques
	GUINOCHET	T Biologie végétale SPCN (Orsay)
	ROLLET	T Chimie minérale
Mlle	JOSIEN	T Chimie SPCN
	CHEVALLEY	T Géométrie algéb. et théorie des groupes
	ARNOULT	T Electronique Orsay
	CHAPELLE	T Physique I (Orsay)
	DELANGE	T Mathématiques I (Orsay)
	DENY	T Mathématiques générales (Orsay)
	GERMAIN	T Mécanique théorique des fluides
	LUCAS	T Géologie
	ALLARD	T Chimie physique
	BERTHELOT	T Physique des particules fondamentales (Orsay)
	BRICARD	T Météor. et physique de l'atmosphère
Mme	ALBE FESSARD	T Psycho. physio.
	FRIEDEL	T Physique des solides (Orsay)
	JULIA M.	T Etudes des moléculaires complexes
	LENDER	T Biologie animale SPCN (Orsay)
	MAGAT	T Physico chimie des radioéléments
Mlle	QUINTIN	T Electrochimie
	MONOD	T Chimie du métabolisme
	BENOIT	T Physio. animale (Orsay)
	DE POSSEL	T Analyse numérique
	CHARLOT	T Chimie analytique
	LEMEE	T Ecologie végétale (Orsay)
	GUERIN	T Chimie MPC (Orsay)
	CHATELET	T Chimie PCB
	JEAN	T Physio. nucléaire (Orsay)
	MATTLER	T Physique SPCN
	BERGERARD	T Zoologie (Orsay)
	BERTEIN	T Electronique (Orsay)
	BOUISSIERES	T Radiochimie
Mme	COUTURE	T Thermo. et méca. physique
	ELLEMBERGER	T Géologie des grandes régions du globe (Orsay)
	FRANC	T Biologie animale PCB
	SCHNELL	Botanique tropicale
	STLKOWSKI	T Physiologie végétale
	ACHER	T Chimie biologique
	BAUDOIN	T Biologie animale PCB
	BEAUMONT	Biologie animale SPCN
	BLAMONT	Géophysique ionosphère
	BOUREAU	T Botanique
	CURIE D.	Physique MGP
	DURAND DELGA	T Géologie
	FREON	T Chimie organique (Orsay)
	HELLER	T Physiologie végétale
	TORTRAT	T Calcul des probabilités
	CAILLEUX	T Géologie SPCN
	MAGNAN	Physique électricité
	DAUDEL	T Mécanique ondulatoire appli. à la Chimie Théor. & à la Phys. Nucléaire.
Mlle	FOURCROY	Biologie végétale SPCN
Mme	CHOQUET BRUHAT	Mécanique analytique et méca. céleste
Mlle	VEIL	T Physiologie générale
	LWOFF	T Microbiologie
	SIESTRUNCK	T Méca. phys. & expérimentale
	LACOMBE	T Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay)
	BROCHARD	T Physique PCB (Orsay)
	CABANNES	T Mécanique générale
	LESIEUR	T Math.I (Orsay)
	MAZET	T Méca. générale (Orsay)
	CAIRE	Géographie physique et géo. dynamique
	COMOLET	Méca. des fluides
	CORABOEUF	T Physiologie animale (Orsay)
	DELLOUE	T Physique de l'atmosphère
	GORENFLOT	Botanique II (Orsay)
	HOUILLON	Biologie animale PCB
	JULLIEN J.	Chimie SPCN (Orsay)
	MALGRANGE	T Technique Math. de la physique (Orsay)
	OLIVIER	Antropologie
	NOZERAN	T Botanique II (Orsay)
	BLANC-LAPIERRE	T Physique ENS (Orsay)
	CHEVAUGEON	T Botanique (Orsay)
	KAHANE	T Mathématiques (Orsay)
	SAMUEL	T Mathématiques ENS féminines
	KOURGANOFF	T Astronomie (Orsay)
	THIRY	T Méca. céleste
	ABELES	Physique SPCN
	AMAT	T Physique PCB
	AUBOIN	T Géologie
Mme	BENOIT-GUEUTAL	T Physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
	BOUGIS	Biologie marine Villefranche/mer
	BRUHAT	T Math. MPC
	BRUNN	T Géologie historique (Orsay)
	CHABBAL	T Physique MGP (Orsay)
	DEHEUVELS	T Math. propé.
	D'ESPAGNAT	T Physique théorique (Orsay)
	FURON	T Géologie SPCN
Mme	GANS	T Génétique
	GENEVES	Biologie végétale PCB
	GUILBERT	Physique CUS Orléans
	HUPE	T Pétrographie
	HOLLANDE	T Biologie générale
	LIONS	T Analyse numérique
	MAITTE	T Chimie PCB
	MEYER	Physique propédeutique
	PANIGEL	Biologie générale
	RAVIER	Pétrographie
	ROSEAU	T Méca. théorique des fluides
	ROUBINE	Electronique
	SILBER	T Chimie PCB
	UEBERSFELD	T Electronique
	YVON	T Théories physiques
	HERVE	T Mathématiques
	NERON	T Math. MPC (Orsay)
Mme	PECKER WIMEL	T Astrophysique
	BALKANSKY	Physique MPC
	LE CORRE	T Electricité
	DELCROIX	T Physique théorique (Orsay)
	GOURDIN	Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
	LEHMANN	T Phys. Exp. des hautes énergies
	NATAF	T Physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
	ECHALIER	Biologie animale PCB
	BARRAUD	Physiologie cellulaire
	LIORET	Physiologie végétale (Orsay)
	DARS	Géologie structurale et Géologie appliquée
	CAMEFORT	T Botanique (agrégation)
	VICHNIEWSKY	T Mécanique industrielle
	BLAQUIERE	Electronique (Orsay)
	ARNOUS	T Physique théorique
	TATIBOUET	Chimie (CSU Orléans)
	MALLIAVIN	T Mathématiques propé. (Orsay)
	GAUDEMAR	Chimie propé.
	PEREZ Y JORBA	Physique Exp. des hautes énergies (Orsay)
	DAVID	T Chimie (agrégation Orsay)
	BROUSSE	T Mécanique théorique
	ROSCH	T Astronomie
	GUY	T Physique expérimentale
	LAZARD	Math MPC
	MOREL P.	Physique MPC
	ARSAC	Programmation
	LEFEBVRE	Chimie MPC
	CHAPEVILLE	Biochimie
	BENOIT	Physique CPEM
	RIO	Chimie CPEM
	JAUZEIN	Géologie ENS
	PREVOST G.	BV CPEM
	FAVARD P.	BA CPEM
	VILKAS	Chimie CPEM
Mlle	FICINI	Chimie CPEM
	LEQUEUX	Astronomie
	COHEN TANNOUDJI	Physique MPC
	TAVERNIER	Physique CPEM
Mme	ROIZEN	Physique CPEM
	DURAND M.	BA SPCN
	PASCAUD	Physiologie
Mme	PETIT	BA CPEN
	BROUSSE	Géologie (Orsay)
	CAGNIAC	Physique agrégation (Orsay)
	LEBERRE	Zoologie (Orsay)
	SCHEFFER	Microbiologie (Orsay)
	de GENNES	Physique des solides (Orsay)
	RIOU	Physique nucléaires exp. (Orsay)
	CLAUSER	Chimie biologique (Orsay)
	CHEVALIER	Physiologie animale (Orsay)
	JANCOVICI	Physique atomique (Orsay)
	FALK-VAIRANT	Physique nucléaire (Orsay)
	FETIZON	Chimie propé. (Orsay)
	CERF	Mathématiques (Orsay)

Secrétaire général ... R. POULAIN

Publ. Inst. Statist. Univ. Paris
14 (1965), 81-241

A mon bon Maître

Table des matières

	Pages
1. INTRODUCTION	85
2. NOTATIONS ET PRELIMINAIRES ALGEBRIQUES	93
2.1. Monoïdes libres	93
2.2. Monoïdes abéliens libres	95
2.3. Mots non décroissants	95
2.4. Algèbre large d'un monoïde	96
2.5. Topologie des séries formelles	99
3. UNE IDENTITE COMBINATOIRE NON COMMUTATIVE .	101
3.1. Introduction	101
3.2. Le monoïde d'intercalement $\mathfrak{A}_{\uparrow}^{*}$	101
3.3. Une identité combinatoire non commutative	104
3.4. Le "Master Theorem" de Mac Mahon	106

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

Pages

4. LA REPRESENTATION EN CYCLES DU MONOÏDE LIBRE 113
4.1. Introduction 113
4.2. Quelques lemmes préliminaires 115
4.3. L'opérateur δ 119
4.4. Les opérateurs τ 124
4.5. Le monoïde $\mathcal{C}$ 127
4.6. L'identité sur les ζ 134

5. LES FACTORISATIONS DE MONOÏDES LIBRES 141
5.1. Introduction 141
5.2. Le théorème de factorisation de Schützenberger . . 141
5.3. Quelques applications et définitions 142

6. UNE APPLICATION DE LA REPRESENTATION EN CYCLES DU MONOÏDE LIBRE 147
6.1. Introduction 147
6.2. L'opérateur δ' 149
6.3. Un théorème combinatoire non commutatif 156

7. LES FACTORISATIONS SPECIALES 161
7.1. Introduction 161
7.2. Préliminaires algébriques 163
7.3. Les factorisations spéciales 168
7.4. Factorisation en mots lexicographiques standards 176
7.5. La factorisation de Spitzer 180
7.6. Factorisation spéciale induite par une fonction continue strictement monotone 184

8. APPLICATIONS DES FACTORISATIONS SPECIALES. UN THEOREME COMBINATOIRE NON COMMUTATIF 187
8.1. Introduction 187
8.2. Rappel de définitions 188

Pages

8.3. Construction de la permutation φ 190

8.4. Exemple 202

9. STATISTIQUES D'ORDRE. FORMULE DE SPITZER .. . 207

9.1. Introduction 207

9.2. Un théorème sur les statistiques d'ordre 208

9.3. Une identité sur les fonctions caractéristiques des statistiques d'ordre 212

9.4. Quelques applications probabilistes des factorisations spéciales 222

10. APPLICATIONS COMBINATOIRES. FORMULE DE DIXON 225

10.1. Introduction 225

10.2. Un résultat combinatoire 226

10.3. L'identité de Dixon 230

10.4. L'identité de Fjeldstad 232

LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES 235

REFERENCES 239

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534911_0024

1. Introduction

Avec la théorie des fluctuations de sommes variables aléatoires, l'étude des problèmes combinatoires en Calcul des Probabilités a été remise en faveur dans les vingt dernières années. De nombreux résultats ont été trouvés à partir de théorèmes combinatoires sur des suites de nombres. Citons, par exemple, le principe d'équivalence de Sparre Andersen [1] ou l'identité dite de Spitzer [38], déjà connue de Pollaczek [30]. Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont deux propriétés définies sur l'ensemble S_n des suites $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de nombres réels, la démonstration de ces théorèmes combinatoires consiste souvent à construire une permutation φ de S_n qui associe à tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de S_n ayant la propriété $\mathcal{R}$ une autre suite $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ ayant la propriété $\mathcal{R}'$ et où la suite $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ est un certain réarrangement de la suite $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

C'est ce problème de réarrangement des suites de nombres, ou plus généralement des séquences d'objets appartenant à un certain ensemble $\mathcal{X}$ que nous allons étudier ici. Nous serons conduits à définir sur le monoïde libre $\mathcal{X}^*$ engendré par $\mathcal{X}$, supposé totalement ordonné (car c'est bien la structure algébrique qui semble s'imposer pour cette étude), une nouvelle opération associative $\intercal$, telle que le couple formé par *l'ensemble* des éléments de $\mathcal{X}^*$ et cette opération est un nouveau monoïde, qu'on appellera *monoïde d'intercalement*, noté $\mathcal{X}^*_\intercal$ (§ 3.2). Une identité combinatoire (formule 1.2 ci-dessous) sera alors établie dans son algèbre large (non commutative), relative à un anneau Ω, qui, en particulier, explicitera et généralisera au cas $\mathcal{X}$ infini l'identité du "Master Theorem" de Mac Mahon. Ces méthodes combinatoires non commutatives nous donneront encore la construction d'une permutation φ de S_n associée à deux propriétés nouvelles $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ (théorèmes 6.1 et 8.1), d'où nous déduirons un nouveau résultat sur les statistiques d'ordre (théorème 9.1) et une identité ayant la même structure formelle que celle de Spitzer (théorème 9.5). Enfin, nous donnerons une nouvelle interprétation combinatoire à des identités conte-

nant des coefficients binomiaux (Dixon, Fjeldstad) (§ 10). Ces principaux résultats sont résumés ci-dessous, chapitre par chapitre.

Le chapitre 2 ("Notations et préliminaires algébriques") nous permet de préciser nos notations (nous avons mis d'ailleurs en appendice une liste des principaux symboles utilisés). On y trouvera rappelées les notions de monoïdes libre et abélien libre engendrés par un ensemble, la notion de mot non décroissant, qui joue un rôle fondamental dans toute cette étude, et les notions d'algèbre large de monoïde ainsi qu'un bref rappel sur la topologie des séries formelles.

Dans le chapitre 3 ("Une identité combinatoire non commutative"), nous établissons une identité combinatoire dans une algèbre non commutative qui peut être considérée comme l'équivalent non commutatif de l'identité du "Master Theorem" de Mac Mahon. Rappelons le résultat de cet auteur ([27] p. 93-98 et théorème 3.1 ci-dessous) :

Soit $\left(a_k = \sum_{l=1}^{n} b_{k,l}\, X_l\right)_{k=1,\ldots,n}$ *une relation matricielle entre* n *indéterminés* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *et* n *autres indéterminés* $X_1, X_2, \ldots, X_n$, *où* $b_{k,l} \in \mathbf{R}$ $(1 \leqslant k, l \leqslant n)$. *Alors si* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *sont* n *entiers* $\geqslant 0$, *le coefficient du terme* $X_1^{c_1} X_2^{c_2} \ldots X_n^{c_n}$ *dans le développement du produit* $a_1^{c_1} a_2^{c_2} \ldots a_n^{c_n}$ *est égal au coefficient du terme* $X_1^{c_1} X_2^{c_2} \ldots X_n^{c_n}$ *dans le développement de la fraction* $1/D$ *où*

$$D = \begin{vmatrix} 1 - X_1 b_{1,1} & - X_1 b_{1,2} & \ldots & - X_1 b_{1,n} \\ - X_2 b_{2,1} & 1 - X_2 b_{2,2} & \ldots & - X_2 b_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ - X_n b_{n,1} & - X_n b_{n,2} & \ldots & 1 - X_n b_{n,n} \end{vmatrix}$$

Nous avons cherché à expliciter ce résultat qui est en fait une identité entre deux séries formelles d'une algèbre commutative. De façon précise, soit Ω un anneau commutatif (unitaire), $\Omega[[\mathfrak{X}^*]]$ (resp. $\Omega[[\bar{\mathfrak{X}}^*]]$) l'algèbre large du monoïde libre $\mathfrak{X}^*$ (resp. du monoïde abélien libre $\bar{\mathfrak{X}}^*$) engendré par un ensemble totalement ordonné $\mathfrak{X}$, α l'homomorphisme canonique de $\Omega[[\mathfrak{X}^*]]$ sur $\Omega[[\bar{\mathfrak{X}}^*]]$ et b une application fixe $b : \mathfrak{X}^2 \longrightarrow \Omega$. Pour chaque $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ de $\mathfrak{X}^*$, de longueur λf positive (en abrégé $f \in \mathfrak{X}^{*+}$), on désigne par $\beta f = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r}$ le mot non décroissant de la classe abélienne $\alpha^{-1} f$ de f et l'on pose

$$\nu f = b(x_{j_1}, x_{i_1})\, b(x_{j_2}, x_{i_2}) \ldots b(x_{j_r}, x_{i_r})$$

($\nu f = 1$ si $f = 1$ (mot unité)). Pour $\mathfrak{X}$ fini, le "Master Theorem" affirme que

$$\Sigma\{\alpha f . \nu f : f \in \mathfrak{X}^*\} = (\mathrm{Det}(I - \mathbf{x}\, B))^{-1} \qquad (1.1)$$

où $\mathbf{x}$ est la matrice diagonale diag $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ($n = \mathbf{card}\ \mathfrak{X}$), I la matrice unité d'ordre n et B la matrice $(b(x_k, x_{k'}))_{(1 \leqslant k, k' \leqslant n)}$. (1.1) est donc une identité dans l'algèbre large $\Omega[[\overline{\mathfrak{X}^*}]]$ et sous cette forme, il semble naturel de chercher une expression analogue pour la série formelle $\Sigma\{f . \nu f : f \in \mathfrak{X}^*\}$ de l'algèbre non commutative $\Omega[[\mathfrak{X}^*]]$, sans aucune hypothèse sur la cardinalité de $\mathfrak{X}$. Nous sommes ainsi amenés à expliciter le déterminant du second membre de (1.1) qui n'a évidemment pas de sens dans une algèbre non commutative. Nous avons ainsi obtenu pour un ensemble $\mathfrak{X}$ quelconque l'identité

$$\Sigma\{f . \nu f : f \in \mathfrak{X}^*\} = (1 - \Sigma\{f . \zeta f . \nu f : f \in \mathfrak{N}\})^{-1} \qquad (1.2)$$

entre deux séries formelles d'une algèbre large $\Omega[[\mathfrak{X}_\intercal^*]]$ d'un monoïde non abélien $\mathfrak{X}_\intercal^*$. Celui-ci est défini comme le couple formé de tous les mots de $\mathfrak{X}^*$ et d'une opération $\intercal$ associative (distincte du produit de juxtaposition mais telle que $\alpha(f \intercal f') = \alpha(ff')$ pour tout $f, f' \in \mathfrak{X}^*$). Dans la formule (1.2), $\mathfrak{N}$ est un certain sous-ensemble de $\mathfrak{X}^*$ et ζ une fonction définie sur $\mathfrak{N}$ et prenant les valeurs $+1$ ou -1. Nous en déduisons, en particulier, le "Master Theorem" pour une infinité de variables commutatives en prenant l'image par α des deux membres.

Ce résultat est explicité dans le chapitre 3. Toutefois, la preuve de l'identité (1.2) ne sera complétée qu'à la fin du chapitre 4 ("La représentation en cycles du monoïde libre") qui contient de nombreux lemmes combinatoires, qui sont assez longs à vérifier. Soit $\theta : \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}^*$ une bijection ; il s'agit, en fait, par analogie avec la théorie du groupe symétrique, où toute permutation peut s'écrire comme produit de cycles disjoints, d'associer à tout mot $f \in \mathfrak{X}^*$ un sous-ensemble U_f de $\mathfrak{Y}^*$ (le monoïde libre engendré par $\mathfrak{Y}$) tel que si $g = y_{l_1} y_{l_2} \ldots y_{l_s} \in U_f$ et si l'on pose

$$\theta y_{l_p} = x_{\nu_{K_{p-1}+1}} x_{\nu_{K_{p-1}+2}} \ldots x_{\nu_{K_p}} \quad (K_o = 0\ ;\ 1 \leqslant p \leqslant s), \qquad (6.1.3)$$

$f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ et $\beta f = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r}$, il correspond à tout $k \in [1, r]$ un et un seul $k' \in [1, r]$ tel que $x_{j_k} = x_{\nu_{k'}}$ et

$$x_{i_k} = x_{\nu_{k'-1}} \quad \text{si} \quad k' \neq K_{p-1} + 1 \quad \text{pour tout} \quad p \in [1, s]$$
$$= x_{\nu_{K_p}} \quad \text{si} \quad k' = K_{p-1} + 1 .$$

Nous disons alors que $g \in U_f$ est une *représentation en cycles* du mot f. Pour chaque problème combinatoire considéré, tout revient à définir, pour tout mot $f \in \mathfrak{X}^*$, une représentation en cycles de ce mot, unique. Par exemple, pour prouver l'identité (1.2), nous montrerons que tout sous-ensemble U_f contient un et un seul mot $g = y_{l_1} y_{l_2} \ldots y_{l_s}$ tel que $\theta y_{l_p} \in \mathfrak{S}_o$ où $\mathfrak{S}_o$ est un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathfrak{M}$ et que si les deux mots θy_{l_p} et $\theta y_{l_{p+1}}$ n'ont pas de lettre en commun, alors $\theta y_{l_p} > \theta y_{l_{p+1}}$. Un tel mot sera appelé *canonique* (définition 4.1) et noté Cf.

Dans le chapitre 5 ("Les factorisations de monoïdes libres"), nous rappelons le théorème de factorisation des monoïdes libres de Schützenberger qui joue un rôle fondamental dans toute cette étude et en donnons quelques applications, utilisées dans le chapitre suivant.

Dans le chapitre 6 ("Une application de la représentation en cycles du monoïde libre"), nous explicitons combinatoirement le résultat numérique suivant, que nous décrirons sur un exemple :

Soit h l'ensemble des 12 suites $x = (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4})$ d'entiers contenant exactement deux fois le nombre 1 et une fois les nombres 2 et 3. Posons $(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, x_{j_4}) = (1, 1, 2, 3)$ et définissons sur h les fonctions ν et ξ à valeurs entières en posant pour $x = (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4})$

νx = nombre d'indices k tels que $x_{i_k} < x_{j_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant 4)$

ξx = nombre d'indices k tels que $x_{i_{k-1}} < x_{i_k}$ $(2 \leqslant k \leqslant 4)$.

Déterminons pour chacune de ces suites x les nombres νx et ξx ; nous avons le tableau

suites x	νx	ξx
1 1 2 3	0	2
1 1 3 2	1	1
1 2 1 3	1	2
1 2 3 1	1	2
1 3 1 2	2	2
1 3 2 1	1	1
2 1 1 3	1	1
2 1 3 1	1	1
2 3 1 1	2	1
3 1 1 2	2	1
3 1 2 1	1	1
3 2 1 1	2	0

Nous observons que le nombre de suites x telles que $\nu x = 0$ (resp. 1 et 2) est égal au nombre des suites x telles que $\xi x = 0$ (resp. 1 et 2). Ce nombre est ici 1 (resp. 7 et 4).

Nous explicitons ce résultat en construisant pour un ensemble $\mathfrak{X}$ totalement ordonné une permutation φ de l'ensemble S_n des suites de longueur n d'éléments de $\mathfrak{X}$ telles que si $\nu x = m (\in \mathbf{N})$ (propriété $\mathfrak{P}$) alors $\xi\varphi x = m$ (propriété $\mathfrak{P}'$). En fait, nous établissons le théorème combinatoire non commutatif suivant (théorème 6.1).

Soit $x = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ *une suite de* n $(n > 1)$ *éléments d'un ensemble totalement ordonné* $\mathfrak{X}$, $(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n})$ *la suite déduite de* x, *en réarrangeant les* x_{i_k} *en ordre non décroissant. Alors il est possible d'associer à* x, *de façon bijective, une troisième suite* $(x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots, x_{\nu_n})$ *où* $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ *est une permutation de* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, *telle qu'à tout* $k \in [1, n]$ *pour lequel* $x_{i_k} < x_{j_k}$ *correspond biunivoquement un* $k' \in [1, n]$ *tel que*

$$x_{i_k} = x_{\nu_{k'-1}} < x_{\nu_{k'}} = x_{j_k}.$$

La démonstration s'appuie encore sur les méthodes développées dans le chapitre 4. Nous montrons que tout sous-ensemble U_f $(f \in \mathfrak{X}^*)$ contient un et un seul mot d'un certain sous-ensemble $\mathfrak{K}_1$ de $\mathfrak{Y}^*$, lui-même en correspondance biunivoque avec $\mathfrak{X}^*$.

Une autre preuve de ce théorème est donnée dans le chapitre 8 ("Application des factorisations spéciales. Un théorème combinatoire non commutatif"), à partir de factorisations du monoïde $\mathfrak{X}^*$ dites *spéciales*. Celles-ci forment une classe importante de factorisations de monoïdes libres étudiées par Schützenberger. En voici la définition :

Une *factorisation spéciale* d'un monoïde libre $\mathfrak{X}^*$ engendré par un ensemble totalement ordonné $\mathfrak{X}$ est la donnée d'un sous-ensemble $\mathfrak{H}$ de mots de $\mathfrak{X}^{*+}$ et d'un ordre total $\preceq$ sur $\mathfrak{H}$ tels que d'une part $h, h' \in \mathfrak{H}$ et $h \succeq h'$ entraînent que la dernière lettre de h est supérieure ou égale (pour l'ordre total de $\mathfrak{X}$) à la première lettre de h' et d'autre part que tout $f \in \mathfrak{X}^{*+}$ a une et une seule factorisation de la forme $f = h_1 h_2 \ldots h_s$ $(s > 0)$ où

$$h_1, h_2, \ldots, h_s \in \mathfrak{H} \quad \text{et} \quad h_1 \succeq h_2 \succeq \ldots \succeq h_s.$$

Nous consacrons tout le chapitre 7 ("Factorisations spéciales") à leur étude. Une construction algébrique en est donnée par une méthode combinatoire utilisée aussi dans l'étude des algèbres de Lie

libres. Elle nous permet d'unifier les résultats de Lyndon sur la factorisation en mots lexicographiques standards et la factorisation définie par Spitzer en théorie des fluctuations de sommes de variables aléatoires. Lorsque $\mathcal{X} = \mathbf{R}$, nous montrons, de plus, qu'à toute fonction continue monotone croissante est attachée une telle factorisation de $\mathcal{X}^*$.

Dans le chapitre 9 ("Statistiques d'ordre. Formule de Spitzer"), nous montrons comment ces résultats combinatoires ont une interprétation naturelle en Calcul des Probabilités. Une identité est établie, ayant la même structure formelle que l'identité de Spitzer, et qui est valable pour une nouvelle famille de fonctions caractéristiques. De façon précise, nous avons (théorèmes 9.1 et 9.5).

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *une suite de variables aléatoires en dépendance symétrique ;* $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ *la statistique d'ordre de* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *(c'est-à-dire la suite des* X_k *rangés en ordre non décroissant* $(1 \leqslant k \leqslant n)$*) et* $b : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction mesurable telle que* $b(x, x') = 0$ *si* $x \geqslant x'$. *Alors, pour* $n \geqslant 2$, *les deux variables aléatoires*

$$Y_n = \sum_{k=2}^{n} b(X_k, X_k^*) \quad \text{et} \quad Z_n = \sum_{k=2}^{n} b(X_{k-1}, X_k)$$

ont même distribution.

Si, en plus, les X_k $(k \geqslant 1)$ *sont indépendantes et équidistribuées, on a en posant*

$$\varphi_n(t) = E \exp(it\, Y_n) = E \exp(it\, Z_n) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 2,$$

$$\varphi_0(t) = \varphi_1(t) = \psi_1(t) = 1 \quad \text{et}$$

$$\psi_k(t) = E \exp[it(b(X_1, X_2) + b(X_2, X_3) + \ldots + b(X_{k-1}, X_k) + b(X_k, X_1))]$$

pour $k > 1$, *l'identité*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)\, u^n = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(t)}{k}\, u^k\right]$$

$(|u| < 1$ *et* $\mathrm{Im}(t) \geqslant 0)$.

A titre d'application, nous donnons enfin, dans le chapitre 10 ("Applications combinatoires. Formule de Dixon"), une nouvelle démonstration de certaines identités combinatoires contenant des coefficients binomiaux, comme l'identité de Dixon

$$\sum_{k=0}^{2p} (-1)^k \binom{2p}{k}^3 = (-1)^p \frac{(3p)!}{(p!)^3} \qquad (p \geq 0)$$

ou celle de Fjeldstad

$$\sum_k (-1)^k \binom{b+c}{c+k} \binom{c+a}{a+k} \binom{a+b}{b+k} = \frac{(a+b+c)!}{a!\ b!\ c!}$$

(a , b , c entiers non négatifs).

Là encore, les mêmes méthodes permettent de donner une interprétation aux coefficients binomiaux apparaissant dans ces formules : nous montrons explicitement quels sont les objets qui sont comptés.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à M. le Professeur Dugué, à qui je dois de m'être intéressé très tôt aux problèmes combinatoires et qui n'a jamais cessé de me prodiguer conseils et encouragements.

Je remercie M. le Professeur Lichnerowicz d'avoir bien voulu présenter mes Notes aux Comptes-Rendus et d'avoir accepté de présider le Jury de cette thèse.

Je remercie également M. le Professeur Fortet de s'être intéressé à mon travail durant mon séjour au C.N.R.S. et d'avoir bien voulu accepté de faire partie du Jury.

Je voudrais exprimer enfin toute ma gratitude à M. le Professeur Schützenberger pour les précieuses indications qu'il n'a cessé, si gentiment, de me donner dans la poursuite de ce travail. Il est à l'origine de cette thèse, qui s'appuie, d'ailleurs, sur certains de ses travaux personnels.

Il m'est en outre très agréable de remercier MM. les Professeurs H.B. Mann et R.C. Bose qui m'ont aidé et encouragé dans mon travail durant mon séjour aux Etats-Unis.

2. Notations et préliminaires algébriques

Nous rappelons dans ce chapitre quelques notions algébriques qui seront utilisées par la suite et précisons nos notations.

En particulier, si $f : X \longrightarrow Y$ est une application quelconque d'un ensemble X dans un ensemble Y, l'image par f de $x \in X$ sera notée fx au lieu de $f(x)$ s'il n'existe aucun risque de confusion.

De même, si h est la composée de deux applications $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$, nous écrirons gfx pour

$$g(f(x)) \quad (x \in X).$$

Les notions de calcul de probabilités que nous utiliserons au chapitre 9 seront indiquées au début dudit chapitre.

2.1. **Monoïdes libres.**

$\mathfrak{X}$ étant un ensemble non vide, soit $\mathfrak{X}^*$ l'ensemble des suites finies non vides $f = (x_{i_k})_{k \in K}$, où K est un intervalle de $\mathbf{N}$ de la forme $[1, r]$. Une suite $f = (x_{i_k})_{k \in [1,r]}$ sera identifiée au *monôme* ou *mot* $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$. Sous cette forme $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ seront dits les *lettres* du mot f.

L'entier positif r est le *degré* du monôme ou la *longueur* du mot f ; on posera $r = \lambda f$. On convient aussi que l'ensemble vide $\emptyset$ forme un mot de $\mathfrak{X}^*$, qu'on notera 1, de longueur $\lambda 1 = 0$. Nous désignerons alors par $\mathfrak{X}^{**}$ l'ensemble des mots de longueur positive.

L'ensemble $\mathfrak{X}^*$ est muni d'une loi associative, le *produit de juxtaposition* qui à deux mots $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ et $f' = x_{i'_1} x_{i'_2} \ldots x_{i'_{r'}}$

de $\mathfrak{X}^*$ fait correspondre le produit $ff' = x_{i''_1} x_{i''_2} \dots x_{i''_{r+r'}}$, tel que $x_{i''_k} = x_{i_k}$ pour $k \in [1, r]$ et $x_{i''_k} = x_{i'_{k-r}}$ pour $k \in [r+1, r+r']$.

Cette loi est associative et admet le mot vide 1 comme élément unité. $\mathfrak{X}^*$ muni de cette loi a alors une structure de monoïde, et le couple formé par $\mathfrak{X}^*$ et le produit de juxtaposition qu'on notera encore $\mathfrak{X}^*$ est appelé *monoïde libre engendré par* $\mathfrak{X}$ (1). On aura par la suite l'occasion de munir $\mathfrak{X}^*$ d'autres structures de monoïde, et les monoïdes formés seront notés différemment ($\mathfrak{X}^*_T$ ou $\mathfrak{X}^*_\perp$).

Remarquons tout de suite que λ est un homomorphisme de $\mathfrak{X}^*$ dans le monoïde additif des entiers. Les éléments de $\mathfrak{X}^*$ de longueur n ($n \geqslant 0$) constituent un sous-ensemble de $\mathfrak{X}^*$ noté $\mathfrak{X}^*_n$; le sous-ensemble $\mathfrak{X}^*_1$ sera identifié à $\mathfrak{X}$ et l'on supposera ainsi $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}^*$.

Si U est un sous-ensemble de $\mathfrak{X}^*$ et $f_0 \in \mathfrak{X}^*$, $f_0 U$ désignera l'ensemble des mots f de $\mathfrak{X}^*$ tels que $f = f_0 f_1$ où $f_1 \in U$.

Si $f = f_1 f_2 \dots f_s$ ($f_1, f_2, \dots, f_s \in \mathfrak{X}^*$) ($s > 0$), on dira que chacun des f_k ($1 \leqslant k \leqslant s$) est un *facteur* de f ; on dira aussi que le produit $f_1 f_2 \dots f_s$ est une *factorisation* de f ou que f factorise en les s mots $f_1, f_2, \dots, f_s$. Le facteur f_1 est appelé *facteur initial* de la factorisation.

Dans la suite, $\mathbf{P}$ (resp. $\mathbf{L}$) désignera l'application qui au mot $f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$ de $\mathfrak{X}^{*+}$ fait correspondre sa première lettre $x = x_{i_1}$ (resp. sa dernière lettre $x = x_{i_r}$) soit

$$\mathbf{P}f = x_{i_1} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}f = x_{i_r}.$$

Deux mots f et f' de $\mathfrak{X}^*$ sont dits *disjoints* s'ils n'ont aucune lettre en commun et *conjugués* s'il existe $f_1, f_2 \in \mathfrak{X}^*$ tels que $f = f_1 f_2$ et $f' = f_2 f_1$. Enfin, un mot f de $\mathfrak{X}^*$ est *primitif* si l'on ne peut avoir $f = f'^p$, $f' \in \mathfrak{X}^{*+}$ pour $p > 1$ et dans ce cas les mots conjugués à f sont aussi primitifs. On parlera ainsi de classe primitive d'éléments conjugués.

---

(1) De cette façon, nous ne définissons en fait qu'un modèle pour le monoïde libre engendré par $\mathfrak{X}$ (Cf. Chevalley (C.): *Fundamental Concepts of Algebra*. Academic Press, New York (1956), pp. 18-19).

2.2. Monoïdes abéliens libres.

Ici encore, nous ne définirons qu'un modèle pour le monoïde abélien libre engendré par un ensemble donné $\mathfrak{X}$.

On appelle *monoïde abélien libre engendré par un ensemble* $\mathfrak{X}$ l'ensemble des applications $h : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbf{N}$ telles que $hx = 0$ sauf pour un nombre fini de $x \in \mathfrak{X}$, muni de l'addition induite par celle de $\mathbf{N}^{\mathfrak{X}}$, que nous noterons $\oplus$.

Cet ensemble est bien stable pour l'addition dans $\mathbf{N}^{\mathfrak{X}}$ et celle-ci est évidemment associative. Ce monoïde sera noté $\overline{\mathfrak{X}}^*$. L'application nulle est l'élément unité de $\overline{\mathfrak{X}}^*$.

Nous désignons par α l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{X}^*$ sur $\overline{\mathfrak{X}}^*$; c'est l'homomorphisme qui fait correspondre à $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ de $\mathfrak{X}^{*+}$ l'application αf de $\overline{\mathfrak{X}}^*$ définie par

$(\alpha f)(x)$ = nombre d'indices k tels que $x_{i_k} = x$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$;

et au mot unité, l'application nulle.

On posera encore $\overline{\mathfrak{X}}^{*+} = \alpha \mathfrak{X}^{*+}$.

Pour $f \in \mathfrak{X}^*$, $\alpha f \in \overline{\mathfrak{X}}^*$ sera appelé *l'image abélienne* de f et pour $h \in \overline{\mathfrak{X}}^*$, $\alpha^{-1} h \in \mathfrak{P}(\mathfrak{X}^*)$ sera la *classe abélienne* de h. Tous les mots d'une même classe abélienne $\alpha^{-1} h$ ont même longueur et on posera $\lambda h = \lambda f$ pour un f quelconque de $\alpha^{-1} h$.

Un élément $h \in \overline{\mathfrak{X}}^*$ sera dit *multilinéaire* [en abrégé $h \in \overline{\mathfrak{M}}$] si $hx \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$. On posera $\mathfrak{M} = \alpha^{-1} \overline{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{X}^*)$ et si $f \in \mathfrak{M}$, on dira encore que f est multilinéaire.

2.3. Mots non décroissants.

Lorsque $\mathfrak{X}$ est muni d'une structure d'ordre total, nous sommes tout naturellement conduits à introduire la notion de mots non décroissants.

Supposons désormais que $\mathfrak{X}$ est totalement ordonné ; alors un mot $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \in \mathfrak{X}^{*+}$ est dit *non décroissant* si $x_{i_1} \leqslant x_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant x_{i_r}$ pour l'ordre total $\leqslant$ dans $\mathfrak{X}$.

Pour $h \in \overline{\mathfrak{X}}^{*+}$ nous désignerons par $N(h)$ la suite croissante $(x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_d})$ des $d = \mathbf{dim}\ h$ lettres x de $\mathfrak{X}$ pour lesquelles $hx > 0$. Posons

$$hx_{u_t} = n_t \quad (1 \leqslant t \leqslant d) \quad \text{et} \quad r = \sum_{t=1}^{d} n_t .$$

Alors le mot

$$\beta' h = x_{u_1}^{n_1} x_{u_2}^{n_2} \ldots x_{u_d}^{n_d}$$

est non décroissant et est le seul mot non décroissant de la classe abélienne $\alpha^{-1} h$.

De là $\beta = \beta'\alpha$ sera une application de $\mathfrak{X}^*$ sur l'ensemble de ses mots non décroissants et pour $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \in \mathfrak{X}^{*+}$ on écrira le mot non décroissant βf de la classe abélienne de f sous la forme $\beta f = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r}$.

Faisons aussi la convention $\beta 1 = 1$. Nous définirons encore pour $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \in \alpha^{-1} h$ et $k \in [1, r]$,

$$\gamma_k f = (\alpha x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}) (x_{i_k}) \in \mathbf{N} .$$

$\gamma_k f$ nous servira à indicer les lettres égales à l'intérieur d'un même mot ; c'est le nombre de lettres égales à x_{i_k} dans le facteur initial $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$ de f.

2.4. Algèbre large d'un monoïde.

Nous présenterons certains résultats combinatoires sous la forme d'identités dans des algèbres larges de monoïdes libres.

Nous rappelons ici cette notion. Soit toujours $\mathfrak{X}^*$ le monoïde libre engendré par un ensemble $\mathfrak{X}$ et Ω un anneau commutatif (unitaire). Considérons le module produit $\Omega^{\mathfrak{X}^*}$ des familles $(a_f)_{f \in \mathfrak{X}^*}$ d'éléments de Ω. Nous écrirons ces familles sous forme de séries formelles $\Sigma\{faf : f \in \mathfrak{X}^*\}$ qu'on munit d'une opération-produit en posant

$$\Sigma\{faf : f \in \mathfrak{X}^*\} . \Sigma\{fa'f : f \in \mathfrak{X}^*\} = \Sigma\left\{f \sum_{f_1 f_2 = f} af_1 . a'f_2 : f \in \mathfrak{X}^*\right\} . \quad (2.4.1)$$

La somme $\sum_{f_1 f_2 = f} af_1 . a'f_2$ est une somme dans l'anneau Ω qui porte sur un nombre fini de termes puisqu'il n'y a pour tout $f \in \mathfrak{X}^*$ qu'un nombre fini de couples (f_1 , f_2) d'éléments de $\mathfrak{X}^*$ tels que $f_1 f_2 = f$. (Propriété (D) de Bourbaki[1]).

---

(1) Bourbaki (N.). - *Algèbre* L. II, chap. 2 (Algèbre Linéaire). Hermann, Paris (1955), p. 114.

Le module $\Omega^{\mathfrak{X}^*}$ muni de cette multiplication devient une algèbre qu'on notera $\mathfrak{A} = \Omega[[\mathfrak{X}^*]]$ et qui est *l'algèbre large du monoïde libre* $\mathfrak{X}^*$. Dans la série formelle $\Sigma\{af : f \in \mathfrak{X}^*\}$, l'élément af de Ω est dit *coefficient* de f. On construit de même l'algèbre large $\bar{\mathfrak{A}} = \Omega[[\bar{\mathfrak{X}}^*]]$ du monoïde $\bar{\mathfrak{X}}^*$ car lui aussi vérifie la propriété (D) qui s'énonce ainsi

il n'y a qu'un nombre fini de couples (h_1, h_2) d'éléments de $\bar{\mathfrak{X}}^*$ tels que $h_1 \oplus h_2 = h$ pour tout $h \in \bar{\mathfrak{X}}^*$.

Nous prolongeons d'abord l'*homomorphisme canonique* $\alpha : \mathfrak{X}^* \longrightarrow \bar{\mathfrak{X}}^*$ à un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ sur $\bar{\mathfrak{A}}$ que nous noterons encore α, défini pour $\Sigma\{af : f \in \mathfrak{X}\} \in \mathfrak{A}^*$ par

$$\alpha\Sigma\{af : f \in \mathfrak{X}^*\} = \Sigma\{h\bar{a}h : h \in \bar{\mathfrak{X}}^*\} \qquad (2.4.2)$$

avec $\bar{a}h = \sum_{f \in \alpha^{-1}h} af$.

Vérifions, en particulier, que α est un homomorphisme pour la multiplication dans les deux algèbres.

Soit $\mathbf{a}_i = \Sigma\{fa_i f : f \in \mathfrak{X}^*\}$ $(i = 1, 2)$ deux éléments de $\mathfrak{A}$. Nous allons vérifier que pour tout h le coefficient de h dans les séries $\alpha\mathbf{a}_1 . \alpha\mathbf{a}_2$ et $\alpha(\mathbf{a}_1 . \mathbf{a}_2)$ est le même et égal à

$$\sum_{\alpha(f_1 f_2)=h} a_1 f_1 . a_2 f_2 .$$

Posons

$$\bar{\mathbf{a}}_i = \alpha\mathbf{a}_i = \Sigma\{h\bar{a}_i\, h : h \in \bar{\mathfrak{X}}^*\} \qquad (i = 1, 2).$$

Alors

$$\bar{a}_i h = \sum_{f \in \alpha^{-1}h} a_i f \qquad (i = 1, 2).$$

Ainsi le coefficient de h dans $\bar{\mathbf{a}}_1 . \bar{\mathbf{a}}_2$ est égal à

$$\sum_{h_1 \oplus h_2 = h} \bar{a}_1 h_1 . \bar{a}_2 h_2 = \sum_{h_1 \oplus h_2 = h} \left(\sum_{f_1 \in \alpha^{-1}h_1} a_1 f_1 \right) \left(\sum_{f_2 \in \alpha^{-1}h_2} a_2 f_2 \right) =$$

$$= \sum_{\alpha(f_1 f_2)=h} a_1 f_1 \; a_2 f_2$$

De même le coefficient de f dans $\mathbf{a}_1 . \mathbf{a}_2$ est

$$\sum_{f_1 f_2 = f} a_1 f_1 \cdot a_2 f_2$$

et le coefficient de h dans $\alpha(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)$ est alors

$$\sum_{f \in \alpha^{-1} h} \sum_{f_1 f_2 = f} a_1 f_1 \cdot a_2 f_2$$

soit

$$\sum_{\alpha(f_1 f_2) = h} a_1 f_1 \cdot a_2 f_2 .$$

Lorsque $\mathfrak{X}$ est fini, $\mathfrak{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $(n > 0)$, il sera bon de considérer pour tout $k \in [1, n]$ l'application $X_k : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbf{N}$ telle que

$$X_k(x) = 1 \quad \text{si} \quad x = x_k$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad x \neq x_k .$$

La base canonique de $\bar{\mathfrak{A}} = \Omega[[\bar{\mathfrak{X}}^*]]$ sera alors identifiée à l'ensemble formé par les produits

$$F = X_{i_1}^{n_{i_1}} X_{i_2}^{n_{i_2}} \ldots X_{i_r}^{n_{i_r}} \quad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n)$$

où $n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_r}$ sont des entiers positifs et par l'élément unité de Ω.

Si F' et F'' sont deux tels éléments écrits sous la forme

$$F' = X_1^{n'_1} X_2^{n'_2} \ldots X_n^{n'_n} \quad \text{et} \quad F'' = X_1^{n''_1} X_2^{n''_2} \ldots X_n^{n''_n}$$

où les n'_k et n''_k sont des entiers $\geqslant 0$, on posera

$$F \oplus F' = X^{n'_1 + n''_1} X^{n'_2 + n''_2} \ldots X^{n'_n + n''_n} .$$

Les X_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ seront appelés les *indéterminés* de l'algèbre $\bar{\mathfrak{A}}$.

Soit $\mathbf{a} = \Sigma\{faf : f \in \mathfrak{X}^*\}$ une série formelle de $\mathfrak{A}$ et soit U un sous-ensemble de $\mathfrak{X}^*$; on notera par $\Sigma\{faf : f \in U\}$ la série $\Sigma\{fbf : f \in \mathfrak{X}^*\}$ telle que $bf = af$ pour $f \in U$ et $bf = 0$ pour $f \notin U$. En particulier, $\Sigma\{faf : f \in \mathfrak{X}_n^*\}$ sera défini comme la *composante homogène de degré* n de $\mathbf{a}$ $(n \geqslant 0)$ et si $\mathbf{a} \neq 0$, *l'ordre de*

$\mathbf{a}$, noté $\mathbf{o}\mathbf{a}$, est défini comme le plus petit des entiers $n \geq 0$ tels que la composante homogène de degré n de $\mathbf{a}$ soit $\neq 0$. On posera aussi $\mathbf{o}\,0 = +\infty$.

Si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ sont deux séries formelles de $\mathfrak{A}$, on a

$$\mathbf{o}\,(\mathbf{a} + \mathbf{a}') \geq \min\{\mathbf{o}\mathbf{a}\,,\ \mathbf{o}\mathbf{a}'\} \tag{2.4.3}$$

$$\mathbf{o}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{a}') \geq \mathbf{o}\mathbf{a} + \mathbf{o}\mathbf{a}'\,. \tag{2.4.4}$$

Nous avons des définitions analogues pour $\overline{\mathfrak{A}}$. Remarquons en plus que si $\mathbf{o}$ désigne aussi l'ordre d'une série formelle dans $\overline{\mathfrak{A}}$, par définition de l'homomorphisme α nous avons pour tout $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}$

$$\mathbf{o}\,\alpha\mathbf{a} \geq \mathbf{o}\mathbf{a}\,. \tag{2.4.5}$$

2.5. Topologie des séries formelles.

La topologie des séries formelles est définie à partir de l'ordre (Cf. Zariski et Samuel : "Commutative Algebra" vol. 2, Van Nostrand, New York, 1960, Pages 132-134) et les résultats sur les algèbres larges de monoïde abélien s'étendent de manière naturelle aux algèbres larges de monoïde non commutatif.

Soit $\mathfrak{A}_n$ l'ensemble des séries de $\mathfrak{A}$ d'ordre $\geq n$. Les relations (2.4.3) et (2.4.4) entrainent alors que pour tout $n \geq 0$, $\mathfrak{A}_n$ est un idéal dans $\mathfrak{A}$ et que $\mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{A}_m$ pour $m \leq n$; d'où $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n = \{0\}$.

La topologie qu'on prendra sur $\mathfrak{A}$ est la topologie pour laquelle l'élément 0 a pour base de voisinages les idéaux $\mathfrak{A}_n$ $(n \geq 0)$ et $\mathfrak{A}$ devient alors un anneau topologique. Pour cette topologie, toute série $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n$ où $\mathbf{o}\mathbf{a}_n \longrightarrow +\infty$, converge vers un élément $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}$.

En particulier, si $\mathbf{a}$ est une série formelle de $\mathfrak{A}$ de composante homogène nulle ou encore si $\mathbf{a} = \Sigma\{faf : f \in \mathfrak{X}^{*+}\}$ alors la série $1 + \Sigma\{\mathbf{a}^n : n > 0\}$ converge et est justement l'inverse de la série formelle $(1 - \mathbf{a})$.

Soit

$$(1 - \mathbf{a})^{-1} = 1 + \Sigma\ \{\mathbf{a}^n : n > 0\} \tag{2.5.1}$$

pour $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_1$.

Nous avons de même

$$(1 - \alpha\mathbf{a})^{-1} = 1 + \Sigma\{\alpha\,\mathbf{a}^n : n > 0\} \tag{2.5.2}$$

pour $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_1$, à cause de la relation (2.4.5) et du fait que α est un homomorphisme.

Pour $k > 0$, la série formelle de $\overline{\mathfrak{A}}$,

$$\alpha\,\Sigma\{\mathbf{a}^n : n > k\} - \Sigma\{\alpha\,\mathbf{a}^n : n > k\}$$

est d'ordre $> k$. Elle converge donc vers 0 lorsque $k \longrightarrow +\infty$. Nous avons ainsi

$$\alpha\,\Sigma\{\mathbf{a}^n : n > 0\} = \Sigma\{\alpha\,\mathbf{a}^n : n > 0\}.$$

Soit

$$\alpha\,(1 - \mathbf{a})^{-1} = (1 - \alpha\,\mathbf{a})^{-1} \tag{2.5.3}$$

pour tout $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_1$.

Remarque. (2.5.4)

Cette relation est encore satisfaite si l'ensemble des mots de $\mathfrak{X}^*$ est muni d'une autre opération associative τ, distincte du produit de juxtaposition, mais telle que pour tout $f, f' \in \mathfrak{X}^*$

$$\alpha(f \,\tau\, f') = \alpha(ff'). \tag{2.5.5}$$

En effet, nous reportant à la formule (2.4.2), il nous suffit seulement de vérifier que α est un homomorphisme pour les multiplications de l'algèbre large $\Omega[[\mathfrak{X}^*_\tau]]$ du monoïde $(\mathfrak{X}^*, \tau)$ et de l'algèbre $\Omega[[\mathfrak{X}^*]]$.

Or, nous avons montré que si $\mathbf{a}_i = \Sigma\{f a_i f : f \in \mathfrak{X}^*\}$ $(i = 1, 2)$ sont deux éléments de $\mathfrak{A}$, le coefficient de h $(h \in \overline{\mathfrak{X}^*})$ dans les séries $\alpha\,\mathbf{a}_1 \,.\, \alpha\,\mathbf{a}_2$ et $\alpha(\mathbf{a}_1 \,.\, \mathbf{a}_2)$ était le même et égal à

$$\sum_{\alpha(f_1 f_2) = h} a_1 f_1 \,.\, a_2 f_2 \,.$$

D'après (2.5.5) ce coefficient est aussi

$$\sum_{\alpha(f_1 \tau f_2) = h} a_1 f_1 \,.\, a_2 f_2$$

et ainsi $\alpha(\mathbf{a}_1 \overset{\cdot}{\tau} \mathbf{a}_2) = \alpha\,\mathbf{a}_1 \,.\, \alpha\,\mathbf{a}_2$ où $\overset{\cdot}{\tau}$ désigne la multiplication de l'algèbre $\Omega[[\mathfrak{X}^*_\tau]]$.

3. Une identité combinatoire non commutative

3.1. Introduction.

Ce chapitre a un double but : d'abord de définir sur l'*ensemble* $\mathfrak{X}^*$ des mots d'un monoïde libre engendré par un ensemble totalement ordonné $\mathfrak{X}$ une nouvelle structure de monoïde notée $\mathfrak{X}_\intercal^*$ (proposition 3.1), puis de démontrer une identité combinatoire dans l'algèbre large $\Omega[[\mathfrak{X}_\intercal^*]]$ de ce nouveau monoïde, relative à un anneau Ω (formule 3.3.2). Si l'on désigne par α l'homomorphisme canonique de cette algèbre sur l'algèbre large $\Omega[[\overline{\mathfrak{X}}^*]]$ du monoïde abélien libre $\overline{\mathfrak{X}}^*$, on retrouve, pour $\mathfrak{X}$ fini, l'identité du "Master Theorem" de Mac Mahon en prenant l'image par α des deux membres de cette identité.

En outre, pour $\mathfrak{X}$ infini, l'image par α donnera le "Master Theorem" pour une *infinité de variables commutatives.*

Les méthodes combinatoires développées dans ce chapitre n'utilisent la cardinalité de $\mathfrak{X}$ et explicitent en particulier le résultat de Mac Mahon.

Signalons enfin que la preuve de l'identité (3.3.2) dans l'algèbre non commutative $\Omega[[\mathfrak{X}_\intercal^*]]$ ne sera complétée qu'au chapitre suivant.

3.2. Le monoïde d'intercalement $\mathfrak{X}_\intercal^*$.

Désormais nous supposons que $\mathfrak{X}$ est un ensemble totalement ordonné quelconque et que Ω est un anneau commutatif (unitaire), non réduit à 0.

Nous formons d'abord le monoïde $\mathfrak{X}^*$ et définissons sur l'ensemble des éléments (mots) de $\mathfrak{X}^*$ une autre loi de composition $\intercal$, telle que le couple $(\mathfrak{X}^*, \intercal)$ soit un monoïde qu'on notera $\mathfrak{X}_\intercal^*$ et telle que l'on ait

$$\alpha(f \intercal f') = \alpha(ff') = \alpha f + \alpha f' \quad \in \bar{\mathfrak{X}}^*$$

pour tout f, $f' \in \mathfrak{X}^*$. En effet, soit $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \in \mathfrak{X}^{*+}$ et $h \in \bar{\mathfrak{X}}^*$ tel que

$$(\alpha f)(x) \leqslant hx \quad (x \in \mathfrak{X}). \tag{3.2.1}$$

Désignons par $x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_d}$ $(x_{u_1} < x_{u_2} < \ldots < x_{u_d})$ les $d = \mathbf{dim}\ h$ lettres x de $\mathfrak{X}$ pour lesquelles $h(x) > 0$; posons $K_o = 0$

$$K_v = (\alpha f)(x_{u_1}) + (\alpha f)(x_{u_2}) + \ldots + (\alpha f)(x_{u_v}) \quad (1 \leqslant v \leqslant d).$$

Alors f factorise en d mots, à savoir

$$f = f_1 f_2 \ldots f_d$$

si l'on pose

$$f_v = 1 \quad \text{(mot unité)} \quad \text{si} \quad (\alpha f)(x_{u_v}) = 0$$

$$= x_{i_{K_{v-1}+1}} x_{i_{K_{v-1}+2}} \ldots x_{i_{K_v}} \quad \text{si} \quad (\alpha f)(x_{u_v}) > 0$$

$(1 \leqslant v \leqslant d)$.

Nous dirons alors que $f_1 f_2 \ldots f_d$ est une *factorisation de* f *suivant* h. Lorsque f est non décroissant, alors

$$f_v = x_{u_v}^{(\alpha f)(x_{u_v})} \quad (1 \leqslant v \leqslant d).$$

En particulier, deux mots f et f' de $\mathfrak{X}^{*+}$ factorisent tous deux suivant $h = \alpha(ff')$ puisque

$$\alpha(ff') = \alpha(f) + \alpha(f')$$

d'où

$$(\alpha f)(x) \text{ (resp. } (\alpha f')(x)) \leqslant h(x) \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Si donc $d = \mathbf{dim}\, \alpha(ff')$ et si $f = f_1 f_2 \ldots f_d$ et $f' = f'_1 f'_2 \ldots f'_d$ sont les deux factorisations de f et f' suivant $\alpha(ff')$, on pose

$$f \intercal f' = f_1 f'_1 f_2 f'_2 \ldots f_d f'_d . \tag{3.2.2}$$

On peut dire qu'on a intercalé de façon canonique les lettres de f' dans les lettres de f, tout en conservant leur ordre. Comme on démontre ci-dessous que $\intercal$ est une opération associative, $\mathfrak{X}^*_{\intercal}$ sera appelé *le monoïde d'intercalement*.

Par définition, on posera aussi

$$1 \top f = f \top 1 = f$$

pour tout $f \in \mathfrak{X}^*$.

Exemple - Si $f = cada$ et $f' = bcd$ sont deux mots du monoïde libre engendré par l'ensemble ordonné $\{a < b < c < d\}$, alors

$$f_1 = ca\ ,\ f_2 = 1 \quad \text{(mot unité)}, \quad f_3 = d\ ,\ f_4 = a\ ,$$
$$f'_1 = 1\ ,\ f'_2 = bc \qquad\qquad f'_3 = b\ ,\ f'_4 = 1$$

et

$$f \top f' = f_1 f'_1\ f_2 f'_2\ f_3 f'_3\ f_4 f'_4 = cabcdba$$

PROPOSITION 3.1. - *L'ensemble* $\mathfrak{X}^*$ *muni de la loi de composition* $\top$ *est un monoïde non commutatif (on le note* $\mathfrak{X}^*_\top$*).*

PREUVE.- Il nous faut vérifier que l'opération $\top$ est associative. Soit donc f, f' et f'' trois mots de $\mathfrak{X}^*$. Posons $h = \alpha(ff'f'')$ et $N(h) = \{x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_d}\}$ (Cf. § 2.3).

Nous désignons par $f_1 f_2 \ldots f_d$, $f'_1 f'_2 \ldots f'_d$ et $f''_1 f''_2 \ldots f''_d$ les factorisations de f, f' et f'' suivant h. Les factorisations de f et f' suivant $\alpha(ff')$ sont alors

$$f_{p_1} f_{p_2} \ldots f_{p_s} \quad \text{et} \quad f'_{p_1} f'_{p_2} \ldots f'_{p_s}$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_s$ est une suite croissante de l'intervalle $[1, d]$. (Un entier p appartient à $[1, d] - \{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ si et seulement si $(\alpha ff')(x_{u_p}) = 0$). De là, par définition de $\top$ (formule 3.3.2)), nous avons

$$f \top f' = f_{p_1} f'_{p_1} f_{p_2} f'_{p_2} \ldots f_{p_s} f'_{p_s}\ .$$

Posons maintenant $f_p = f'_p = 1$ pour tout $p \in [1, d]$ tel que $(\alpha ff')(x_{u_p}) = 0$.

Nous pouvons écrire alors

$$f \top f' = f_1 f'_1 f_2 f'_2 \ldots f_d f'_d$$

et $(f_1 f'_1)(f_2 f'_2) \ldots (f_d f'_d)$ est justement la factorisation de $f \top f'$ suivant h.

De là, par définition de $\top$, nous avons

$$(f \top f')\ f'' = (\,(f_1\ f_1')f_1''\,)\,(\,(f_2\ f_2')f_2''\,)\ \ldots\ (\,(f_d\ f_d')f_d''\,)$$
$$= (f_1(f_1'\ f_1''))\ (f_2(f_2'\ f_2''))\ \ldots\ (f_d(f_d'\ f_d''))$$

et comme on montre de la même façon que

$$f' \top f'' = f_1'\ f_1''\ f_2'\ f_2''\ \ldots\ f_d'\ f_d'' ,$$

nous avons bien

$$(f \top f') \top f'' = f \top (f' \top f'').$$

3.3. Une identité combinatoire non commutative.

Le monoïde $\mathfrak{X}_\top^*$ satisfait lui aussi à la propriété (D) (Cf. § 2.4) et l'on peut former son algèbre large $\Omega[[\mathfrak{X}_\top^*]]$ relative à Ω. Nous donnerons dans ce paragraphe une identité combinatoire dans cette algèbre. Nous verrons que la cardinalité de $\mathfrak{X}$ n'intervient pas. Il nous faut seulement supposer $\mathfrak{X}$ totalement ordonné.

Donnons d'abord quelques définitions.

Soit $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ un mot multilinéaire de $\mathfrak{X}^*$ ($f \in \mathfrak{M}$) et $\beta f = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r}$ le mot non décroissant qui lui est associé.

Soit ε_f l'indice de la permutation $x_{j_k} \longrightarrow x_{i_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ de l'ensemble $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}\}$.

On désigne alors par ζ l'application $\zeta : \mathfrak{M} \longrightarrow \{+1, -1\}$ qui a f fait correspondre $\zeta f = \varepsilon_f (-1)^{\lambda f + 1}$.

Soit d'autre part $b : \mathfrak{X}^2 \longrightarrow \Omega$ une application fixe.

Posons pour chaque $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \in \mathfrak{X}^{*+}$,

$$\nu f = b(x_{j_1}, x_{i_1})\, b(x_{j_2}, x_{i_2}) \ldots b(x_{j_r}, x_{i_r}) \qquad (3.3.1)$$

où $x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r}$ est le mot non décroissant βf de la classe abélienne de f (Cf. § 2.3) et $\nu f = 1$ si $f = 1$ (mot unité).

Nous avons alors le résultat suivant

THEOREME 3.1. - $\nu : \mathfrak{X}_\top^* \longrightarrow \Omega$ *est un homomorphisme de* $\mathfrak{X}_\top^*$ *dans le monoïde multiplicatif de* Ω *et dans l'algèbre large* $\Omega[[\mathfrak{X}_\top^*]]$, *on a l'identité*

$$(1 - \Sigma\{f \,.\, \zeta f \,.\, \nu f : f \in \mathfrak{N}\})^{-1} = \Sigma\{f \,.\, \nu f : f \in \mathfrak{X}^*\} \quad (3.3.2)$$

PREUVE.- Vérifions d'abord que ν est un homomorphisme. Pour cela, posons pour deux mots $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ et

$$f' = x_{i'_1} x_{i'_2} \ldots x_{i'_r} \in \mathfrak{X}^{*+}$$

de même longueur $\lambda f = \lambda f' = r$,

$$B(f' , f) = b(x_{i'_1} , x_{i_1})\ b(x_{i'_2} , x_{i_2}) \ldots b(x_{i'_r} , x_{i_r})$$

et $B(f , f') = 1$

$$\text{si} \quad f = f' = 1 \quad \text{(mot unité)}.$$

Nous avons ainsi pour tout $f \in \mathfrak{X}^*$,

$$\nu f = B(\beta f , f).$$

Soit $f = f_1 \ldots f_d$ et $f' = f'_1 \ldots f'_d$ les factorisations de deux mots f et $f' \in \mathfrak{X}^{*+}$ suivant $\alpha(ff')$, et de même $\beta f = \overline{f}_1 \ldots \overline{f}_d$ et $\beta f' = \overline{f}'_1 \ldots \overline{f}'_d$ les factorisations des mots non décroissants βf et $\beta f'$ qui leur sont associés.

Par définition de la fonction ν, nous avons

$$\nu f = B(\overline{f}_1 , f_1)\ B(\overline{f}_2 , f_2) \ldots B(\overline{f}_d , f_d)$$
$$\nu f' = B(\overline{f}'_1 , f'_1)\ B(\overline{f}'_2 , f'_2) \ldots B(\overline{f}'_d , f'_d).$$

Mais d'autre part

$$\beta(f \top f') = \overline{f}_1 \overline{f}'_1 \overline{f}_2 \overline{f}'_2 \ldots \overline{f}_d \overline{f}'_d = \beta f \top \beta f'$$

et

$$f \top f' = f_1 f'_1 f_2 f'_2 \ldots f_d f'_d.$$

D'où

$$\nu(f \top f') = B(\beta(f \top f') , f \top f') =$$

$$= B(\overline{f}_1 , f_1)\ B(\overline{f}'_1 , f'_1)\ B(\overline{f}_2 , f_2)\ B(\overline{f}'_2 , f'_2) \ldots B(\overline{f}_d , f_d)\ B(\overline{f}'_d , f'_d)$$

$$= B(\overline{f}_1 , f_1)\ B(\overline{f}_2 , f_2) \ldots B(\overline{f}_d , f_d)\ B(\overline{f}'_1 , f'_1)\ B(\overline{f}'_2 , f'_2) \ldots B(\overline{f}'_d , f'_d)$$

$$= \nu f \,.\, \nu f' \,.$$

Pour démontrer l'identité (3.3.2), il nous suffit alors, puisque ν est un homomorphisme, de montrer que

1/ pour tout $f \in \mathfrak{X}^*$,

$$\Sigma \zeta f_{m_1} \zeta f_{m_2} \ldots \zeta f_{m_t} = 1$$

où la somme est étendue à toutes les suites $f_{m_1}, f_{m_2}, \ldots, f_{m_t}$ de $\mathfrak{M}$ telles que $f = f_{m_1} \top f_{m_2} \top \ldots \top f_{m_t}$ et

2/ que $\mathfrak{M}$ engendre $\mathfrak{X}^*_{\top}$.

Ce résultat sera démontré au chapitre suivant (propositions 4.3 et 4.6).

3.4. Le "Master Theorem" de Mac Mahon.

Dans son ouvrage sur l'analyse combinatoire, Mac Mahon ([27] pp. 93-98) établit le théorème suivant (voir aussi [18] pp. 49-50)

THEOREME 3.2 ("Master Theorem"). - *Soit*

$$\left(a_k = \sum_{l=1}^{n} b_{k,l} X_l\right)_{k=1,\ldots,n}$$

une relation matricielle entre n *indéterminés* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *et* n *autres indéterminés* $X_1, X_2, \ldots, X_n$, *où* $b_{k,l} \in \mathbf{R}$ $(1 \leqslant k, l \leqslant n)$. *Alors si* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *sont* n *entiers* > 0, *le coefficient du terme* $X_1^{c_1} X_2^{c_2} \ldots X_n^{c_n}$ *dans le développement du produit* $a_1^{c_1} a_2^{c_2} \ldots a_n^{c_n}$ *est égal au coefficient du terme* $X_1^{c_1} X_2^{c_2} \ldots X_n^{c_n}$ *dans le développement de la fraction* $1/D$

$$D = \begin{vmatrix} 1 - X_1 b_{11} & - X_1 b_{12} & \ldots & - X_1 b_{1n} \\ - X_2 b_{21} & 1 - X_2 b_{22} & \ldots & - X_2 b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ - X_n b_{n1} & - X_n b_{n2} & \ldots & 1 - X_n b_{nn} \end{vmatrix} \qquad (3.4.1)$$

Pour démontrer ce résultat, Mac Mahon utilise de subtiles transformations dans des fonctions génératrices à plusieurs variables commutatives. Ces transformations ne font cependant pas apparaître la nature combinatoire du résultat qui est en fait une identité sur des séries formelles commutatives et qui d'autre part n'est valable que pour un nombre fini de variables alors qu'a priori il ne semble pas que le cardinalité doive intervenir.

Il existe aussi une démonstration plus récente de ce résultat par Good [15] qui s'appuie sur un théorème sur les fonctions ana-

lytiques à plusieurs variables complexes établi par lui également [16]. Ce théorème lui permet de donner une démonstration courte et élégante du théorème de Mac Mahon en interprétant le déterminant D comme le jacobien d'une certaine transformation. Là encore, on ne peut par ces méthodes expliciter le résultat ou encore étudier le cas d'une infinité de variables.

Nous nous proposons dans cette section de reformuler ce théorème et de montrer qu'il affirme qu'une certaine identité est valable dans une algèbre commutative (formule 3.4.2). Ceci nous permettra d'établir la transition entre les cas non commutatif et commutatif, c'est-à-dire d'indiquer comment on passe de l'identité (3.3.1) du théorème 3.1 à l'identité (3.4.2) du "Master Theorem". Nous verrons enfin que l'opération τ du paragraphe 3.2 s'introduit de façon naturelle et que le "Master Theorem" est encore valable pour une infinité de variables commutatives.

Reprenons les hypothèses du théorème 3.2, en supposant que les coefficients $b_{k,l}$ $(1 \leqslant k, l \leqslant n)$ sont pris dans un anneau commutatif (unitaire) Ω non réduit à 0. $\mathfrak{X}$ étant alors un ensemble de n éléments $(n > 0)$ $\mathfrak{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, nous désignons par $\mathfrak{A}$ et $\overline{\mathfrak{A}}$ les algèbres larges des monoïdes libre $\mathfrak{X}^*$ et abélien libre $\overline{\mathfrak{X}}^*$ engendrés par $\mathfrak{X}$ et nous considérons que les n indéterminés $X_1, X_2, \ldots, X_n$ du théorème 3.2 sont les n indéterminés de l'algèbre $\overline{\mathfrak{A}}$. (Cf. § 2.4). Dans ces conditions, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont n éléments de $\overline{\mathfrak{A}}$ et nous notons par $\overline{\nu} : \overline{\mathfrak{X}} \longrightarrow \Omega$ l'application qui à $h = X_1^{c_1} X_2^{c_2} \ldots X_n^{c_n} \in \overline{\mathfrak{X}}^*$ fait correspondre le coefficient de h dans $a_1^{c_1} a_2^{c_2} \ldots a_n^{c_n}$. Nous posons aussi $\overline{\nu} 1 = 1$. Il sera enfin commode de considérer les coefficients $b_{k,l}$ comme les images des couples (x_k, x_l) par une certaine application fixe $b : \mathfrak{X}^2 \longrightarrow \Omega$, soit

$$b_{k,l} = b(x_k, x_l) \quad (1 \leqslant k, l \leqslant n).$$

Le déterminant D où D est donné par la formule (3.4.1) est un certain élément de $\overline{\mathfrak{A}}$ qui est inversible dans $\overline{\mathfrak{A}}$. Le "Master Theorem" affirme alors

Dans l'algèbre large $\Omega[[\overline{\mathfrak{X}}^*]]$ *on a l'identité*

$$\Sigma\{h \cdot \overline{\nu} h : h \in \overline{\mathfrak{X}}^*\} = D^{-1} \tag{3.4.2}$$

Nous allons maintenant donner une forme plus symétrique à cette identité. D'abord le déterminant D de la formule (3.4.1) peut encore s'écrire

$$D = 1 + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leqslant n} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_r} \det (b_{j,j'})_{(j,j' \in \{j_1, j_2, \ldots, j_r\})} \tag{3.4.3}$$

où la somme $\sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leqslant n}$ est étendue, pour r fixé $\in [1, n]$, à toutes les suites croissantes $j_1, j_2, \ldots, j_r$ de r entiers extraites de $[1, n]$. Pour toute suite croissante $(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ extraite de $[1, n]$, notons par $\mathfrak{S}_{j_1 j_2 \ldots j_r}$ le groupe symétrique opérant sur $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$. Le mot $X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_r}$ étant multilinéaire, la classe abélienne $\alpha^{-1}(X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_r})$ contient exactement les mots

$$\{x_{\sigma j_1} x_{\sigma j_2} \ldots x_{\sigma j_r} : \sigma \in \mathfrak{S}_{j_1 j_2 \ldots j_r}\} \tag{3.4.4}$$

On peut donc écrire l'expression

$$X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_r} \det (b_{j,j'})_{(j,j' \in \{j_1, j_2, \ldots, j_r\})}$$

de la formule (3.4.3) comme

$$\Sigma \{\alpha(x_{\sigma j_1} x_{\sigma j_2} \ldots x_{\sigma j_r}) . \varepsilon_\sigma . b_{j_1, \sigma j_1} b_{j_2, \sigma j_2} \ldots b_{j_r, \sigma j_r} : \sigma \in \mathfrak{S}_{j_1 j_2 \ldots j_r}\} \tag{3.4.5}$$

où ε_σ est l'indice de la permutation σ. Posant alors

$$b_{k,l} = b(x_k, x_l) \quad (1 \leqslant k, l \leqslant n)$$

et remarquant que l'indice ε_σ de la permutation σ est identique à l'indice ε_f de la permutation : $x_{j_k} \longrightarrow x_{i_k}$ où $i_k = \sigma j_k$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ et $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$, la formule (3.4.5) peut encore s'écrire

$$\Sigma \{\alpha f . \varepsilon_f . \nu f : f \in \alpha^{-1}(X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_r})\}, \tag{3.4.6}$$

où νf est, pour tout $f \in \mathfrak{M}$, un élément de Ω, défini en (3.3.1). De là, se rappelant que $\zeta f = \varepsilon_f . (-1)^{\lambda f + 1}$, pour $f \in \mathfrak{M}$, nous avons

$$D = \alpha(1 - \Sigma \{f . \zeta f . \nu f : f \in \mathfrak{M}\}) \tag{3.4.7}$$

où $\mathfrak{M}$ est l'ensemble des mots multilinéaires de $\mathfrak{X}^*$. D est ainsi l'image par α d'une série formelle (réduite ici à un polynome puisque $\mathfrak{X}$ est fini) de l'algèbre non commutative, série qui apparaît dans l'identité du théorème 3.1. .

Explicitons maintenant le premier membre de (3.4.2). Nous montrons d'abord

PROPOSITION 3.2. - *Pour tout* $h \in \overline{\mathfrak{X}}^*$, *on a*

$$\overline{\nu} h = \Sigma \{\nu f : f \in \alpha^{-1} h\} \tag{3.4.8}$$

où pour tout $f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} \in \mathfrak{X}^*$,

$$\nu f = b(x_{j_1}, x_{i_1})\, b(x_{j_2}, x_{i_2}) \dots b(x_{j_r}, x_{i_r})$$

$x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_r}$ *étant le mot non décroissant* βf *associé à* f.

PREUVE.- Soit donc $h = X_1^{c_1} X_2^{c_2} \dots X_n^{c_n}$ un mot de $\overline{\mathfrak{X}}^{*+}$. Désignons par $u_1, u_2, \dots, u_d$ la suite croissante des entiers u tels que $c_u > 0$ $(1 \leqslant u \leqslant n)$. Alors, par définition, $\overline{\nu} h$ est le coefficient de h dans le développement de

$$\Big(\sum_{l=1}^{n} b_{u_1,l}\, X_l\Big)^{c_{u_1}} \Big(\sum_{l=1}^{n} b_{u_2,l}\, X_l\Big)^{c_{u_2}} \dots \Big(\sum_{l=1}^{n} b_{u_d,l}\, X_l\Big)^{c_{u_d}}. \quad (3.4.9)$$

Le mot non décroissant $\beta' h$ de la classe abélienne $\alpha^{-1} h$ s'écrit

$$\beta' h = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_r} = x_{u_1}^{c_{u_1}} x_{u_2}^{c_{u_2}} \dots x_{u_d}^{c_{u_d}},$$

c'est-à-dire que l'on a

$$j_1 = j_2 = \dots = j_{c_{u_1}} = u_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$j_{c_{u_1}+\dots+c_{u_{d-1}}+1} = \dots = j_{c_{u_1}+\dots+c_{u_d}} = u_d.$$

L'expression (3.4.9) peut donc s'écrire, en posant $b_{k,l} = b(x_k, x_l)$ $(1 \leqslant k, l \leqslant n)$,

$$\Big(\sum_{l=1}^{n} b(x_{j_1}, x_l)\, X_l\Big) \Big(\sum_{l=1}^{n} b(x_{j_2}, x_l)\, X_l\Big) \dots \Big(\sum_{l=1}^{n} b(x_{j_r}, x_l)\, X_l\Big). \quad (3.4.10)$$

De là, le coefficient $\overline{\nu} h$ est égal à

$$\Sigma\, b(x_{j_1}, x_{i_1})\, b(x_{j_2}, x_{i_2}) \dots b(x_{j_r}, x_{i_r}) \quad (3.4.11)$$

où la somme est étendue à tous les mots $f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$ contenant exactement c_{u_1} fois la lettre x_{u_1}, ..., c_{u_d} fois la lettre x_{u_d}, c'est-à-dire, par définition de l'homomorphisme α, tous les mots $f \in \alpha^{-1} h$. Le résultat suit alors du fait que la quantité $b(x_{j_1}, x_{i_1})\, b(x_{j_2}, x_{i_2}) \dots b(x_{j_r}, x_{i_r})$ de (3.4.10) n'est autre que le coefficient νf du mot $f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} \in \alpha^{-1} h$.

Par définition de l'homomorphisme α (cf. § 2.4), l'image par α de la série formelle $\Sigma\{f.\, \nu f : f \in \mathfrak{X}^*\}$ n'est autre que $\Sigma\{h.\, \overline{\nu} h : h \in \overline{\mathfrak{X}}^*\}$. Ainsi, en vertu de (3.4.2) et (3.4.7), l'identité du "Master Theorem" s'écrit

$$(\alpha(1 - \Sigma\{f.\zeta f.\nu f : f\in \mathfrak{M}\}))^{-1} = \alpha\Sigma\{f.\nu f : f\in \mathfrak{X}^*\} \quad (3.4.12)$$

Cette forme est plus symétrique ; elle fait disparaître le déterminant qui nous imposait de considérer le cas $\mathfrak{X}$ fini et fait apparaître la fonction ν dans les deux membres. Il était donc naturel de chercher à définir sur $\mathfrak{X}^*$ une opération associative τ pour laquelle ν était un homomorphisme de $(\mathfrak{X}^*, \tau)$ dans le monoïde multiplicatif de Ω,

$$\nu(f \tau f') = \nu f.\nu f' \qquad (f, f' \in \mathfrak{X}^*)$$

et à voir si l'identité

$$(1 - \Sigma\{f.\zeta f.\nu f : f \in \mathfrak{M}\})^{-1} = \Sigma\{f.\nu f : f \in \mathfrak{X}^*\} \quad (3.4.13)$$

était valable dans l'algèbre large $\Omega[[\mathfrak{X}_\tau^*]]$ du monoïde $(\mathfrak{X}^*, \tau)$. C'est ce que nous avons fait dans les paragraphes 3.2 et 3.3 avec le monoïde d'intercalement $\mathfrak{X}_\tau^*$.

Nous montrons, pour terminer, que l'identité (3.4.12) qui est l'identité du "Master Theorem" pour $\mathfrak{X}$ fini, est aussi valable pour un ensemble $\mathfrak{X}$ quelconque mais totalement ordonné.

Il suffit, en effet, de considérer l'identité (3.3.2) où les deux membres sont des séries formelles de $\Omega[[\mathfrak{X}_\tau^*]]$ et de prendre l'image par α de ces deux membres, où α va désigner ici l'homomorphisme canonique de $\Omega[[\mathfrak{X}_\tau^*]]$ sur $\bar{\mathfrak{A}}$. (Cf. (2.4.2) et remarque (2.5.4)). Nous avons alors

$$\alpha((1 - \Sigma\{f.\zeta f.\nu f : f \in \mathfrak{M}\})^{-1}) = (\alpha(1 - \Sigma\{f.\zeta f.\nu f : f \in \mathfrak{M}\}))^{-1}$$

d'après (2.5.3) et la remarque (2.5.4), d'où l'identité (3.4.12) en prenant aussi l'image par α du second membre de (3.3.2). Nous décrivons ce résultat dans le théorème 3.3 ci-dessous après avoir rappelé les notions utilisées.

Soit $\mathfrak{A}$ et $\bar{\mathfrak{A}}$ les algèbres larges des monoïdes libre $\mathfrak{X}^*$ et abélien libre $\bar{\mathfrak{X}}^*$ engendrés par un ensemble totalement ordonné $\mathfrak{X}$, relatives à un anneau commutatif (unitaire) Ω ;

$b : \mathfrak{X}^2 \longrightarrow \Omega$ une application ;

$\nu : \mathfrak{X}^* \longrightarrow \Omega$ l'application qui à

$f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \in \mathfrak{X}^{*+}$ (c'est-à-dire différent du mot unité) fait correspondre la quantité

$b(x_{j_1}, x_{i_1})\, b(x_{j_2}, x_{i_2}) \ldots b(x_{j_r}, x_{i_r})$ où $x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r} = \beta f$

(le mot non décroissant de la classe abélienne de f) et au mot unité 1, l'unité de Ω ;

ζ une application définie sur $\mathfrak{M}$, l'ensemble des mots multilinéaires de $\mathfrak{X}^*$, à valeurs $+1$ ou -1, qui à $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ de $\mathfrak{M}$ fait correspondre la quantité $\zeta f = (-1)^{\lambda f + 1} \varepsilon_f$ où ε_f est l'indice de la permutation : $x_{j_k} \longrightarrow x_{i_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ de l'ensemble $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}\}$ $(x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r} = \beta f)$.

Posons aussi $\overline{\mathfrak{M}} = \alpha \mathfrak{M}$ et pour $h \in \overline{\mathfrak{X}}^*$,

λh = longueur du mot h

$\overline{\mu} = \Sigma\{\zeta f . \nu f : f \in \alpha^{-1} h\}$

$\overline{\nu} = \Sigma\{\nu f : f \in \alpha^{-1} h\}$.

Nous avons alors

THEOREME 3.3. -

$$(1 - \Sigma\{h . \overline{\mu} h : h \in \overline{\mathfrak{M}}\})^{-1} = \Sigma\{h . \overline{\nu} h : h \in \overline{\mathfrak{X}}^*\}$$

dans l'algèbre commutative $\overline{\mathfrak{A}}$.

4. La représentation en cycles du monoïde libre

4.1. Introduction.

Pour compléter la démonstration du théorème 3.1, nous avons vu qu'il nous restait à démontrer que $\mathfrak{M}$ était un système de générateurs de l'algèbre large $\Omega\,[[\mathfrak{X}_T^*]]$ et aussi à établir une identité sur la fonction ζ introduite au chapitre précédent. Ces résultats sont donnés maintenant (propositions 4.3 et 4.5 respectivement).

Avant de les établir, nous aurons besoin d'une série de lemmes combinatoires, tous assez longs à vérifier. Ils sont reproduits dans ce chapitre, ce qui explique sa longueur. Toutefois ils conservent un intérêt propre car ils vont aussi nous fournir des résultats combinatoires qui seront exploités dans les chapitres 6 et 10.

Ils nous permettent, en fait, d'écrire les éléments f d'un monoïde $\mathfrak{X}^*$ engendré par un ensemble $\mathfrak{X}$ non plus sous la forme de mots, mais, par analogie avec la théorie du groupe des permutations, sous forme de produits de cycles.

D'où le titre de ce chapitre.

Pour chaque problème combinatoire considéré, tout va revenir à définir pour tout mot $f \in \mathfrak{X}^*$ une représentation en cycles, unique.

Rappelons d'abord rapidement quelques propriétés du groupe symétrique.

E étant un ensemble fini de r $(r > 0)$ éléments, le groupe symétrique d'ordre r opérant sur E est défini comme l'ensemble des permutations de E muni de la loi de composition des fonctions. Si σ est une telle permutation, elle induit une relation d'équiva-

lence $\bar{\sigma}$ sur E, en posant pour x et $y \in E$, $x \bar{\sigma} y \Longleftrightarrow$ il existe un entier n tel que $x = \sigma^n y$.

Un *cycle* de la permutation σ est alors défini comme la permutation de E dont la restriction à C (l'une des classes d'équivalence de $\bar{\sigma}$) est égale à la restriction de σ à C et dont la restriction à $E - C$ est l'application identique. σ est alors le produit de ses cycles pris dans un ordre quelconque. Si $C = \{x_{v_1}, x_{v_2}, \ldots, x_{v_K}\}$ est une classe d'équivalence de $\bar{\sigma}$ $(1 \leqslant K \leqslant r)$, on peut supposer que les indices $v_1, v_2, \ldots, v_K$ ont été choisis de façon que

$$x_{v_K} = \sigma x_{v_1}$$

et si $K > 1$, en plus

$$x_{v_1} = \sigma x_{v_2}, \quad x_{v_2} = \sigma x_{v_3}, \ldots, \quad x_{v_{K-1}} = \sigma x_{v_K}.$$

Il est alors d'usage de noter le cycle correspondant par

$$(x_{v_1} x_{v_2} \ldots x_{v_K}). \tag{4.1.1}$$

Si tous les cycles de la permutation σ sont

$$(x_{v_{K_{p-1}+1}} \; x_{v_{K_{p-1}+2}} \ldots x_{v_{K_p}}) \quad (K_0 = 1 \; ; \; 1 \leqslant p \leqslant s)$$

on écrit la permuation σ sous la forme

$$\sigma = (x_{v_1} x_{v_2} \ldots x_{v_{K_1}})(x_{v_{K_1+1}} x_{v_{K_1+2}} \ldots x_{v_{K_2}}) \ldots (x_{v_{K_{s-1}+1}} x_{v_{K_{s-1}+2}} \ldots x_{v_{K_s}}). \tag{4.1.2}$$

Soit maintenant $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ un mot multilinéaire de $\mathfrak{X}^*$ où $\mathfrak{X}$ est totalement ordonné et $\beta f = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r}$ le mot non décroissant associé.

Faisons correspondre à f la permutation σ de l'ensemble $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}\}$ définie par $\sigma : x_{j_k} \longrightarrow x_{i_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$, puis interprétons les cycles de cette permutation écrits sous la forme (4.1.1) comme des éléments d'un ensemble $\mathfrak{Y}$ en correspondance biunivoque avec $\mathfrak{X}^*$, et la permutation σ écrite sous la forme (4.1.2) comme un certain mot de $\mathfrak{Y}^*$.

Nous dirons alors que σ est une *représentation en cycles* de f. Le but de cette suite de lemmes va donc être de préciser cette notion et de l'étendre aux mots de $\mathfrak{X}^*$ non multilinéaires.

Nous pourrons alors composer les mots de $\mathcal{Y}^*$ par le produit de juxtaposition de $\mathcal{Y}^*$ et cette opération correspondra justement à l'opération τ définie sur $\mathcal{X}^*$ (lemme 4.5).

Mentionnons enfin que ce chapitre reprend et développe certains points d'une note aux Comptes Rendus [12].

4.2. Quelques lemmes préliminaires.

$\mathcal{X}$ étant un ensemble quelconque, nous supposons désormais que h est un élément fixe de $\overline{\mathcal{X}^*}^+$.

Soit $x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_d}$ les $d = \mathbf{dim}\ h$ lettres x de $\mathcal{X}$ telles que $hx > 0$.

Posons

$$hx_{u_t} = n_t \quad (1 \leqslant t \leqslant d)$$

et

$$r = \sum_{t=1}^{d} n_t .$$

De plus, désignons par $N(h)$ l'ensemble des couples

$$\{(x_{u_t}, m_t) : \ 1 \leqslant m_t \leqslant n_t ; \ 1 \leqslant t \leqslant d\}$$

et par $E(h)$ l'ensemble des applications ϕ de $N(h)$ sur l'ensemble $\{x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_d}\}$ telles que

$$\mathbf{card}\ \{x : \phi^{-1} x = x_{u_t}\} = n_t \quad (1 \leqslant t \leqslant d).$$

(Ce sont les applications telles que tout x_{u_t} est l'image par ϕ de n_t couples exactement de $N(h)$ $(1 \leqslant t \leqslant d)$).

Nous nous proposons alors de définir une représentation en cycles de ces fonctions. D'abord, nous introduisons un ensemble $\mathcal{Y}$ et une bijection $\theta : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}^*$ que nous étendons à un épimorphisme du monoïde libre $\mathcal{Y}^*$ engendré par $\mathcal{Y}$ sur $\mathcal{X}^*$, en posant pour $g = y_{l_1} y_{l_2} \cdots y_{l_s}$

$$\theta g = \theta y_{l_1}\, \theta y_{l_2} \cdots \theta y_{l_s}$$

Ensuite nous désignons par $G(h)$ le sous-ensemble des mots g de $\mathcal{Y}^*$ tels que $\alpha\theta\, g = h$.

Pour $g = y_{l_1} y_{l_2} \ldots y_{l_s} \in G(h)$, nous posons

$$\theta g = x_{v_1} x_{v_2} \ldots x_{v_r} \in \alpha^{-1}h$$

$$K_o = 0, \quad K_p = \lambda\theta y_{l_1} + \ldots + \lambda\theta y_{l_p} \quad (1 \leqslant p \leqslant s).$$

Alors l'ensemble $\{(x_{v_k}, \gamma_k\theta g) : 1 \leqslant k \leqslant r\}$ est identique à N(h), puisque par définition $\theta g \in \alpha^{-1}h$.

L'application qui au couple $(x_{v_k}, \gamma_k\theta g)$ fait correspondre l'élément $x_{v_{k-1}}$ si $k \neq K_{p-1}+1$ pour tout $p \in [1, s]$ et l'élément $x_{v_{K_p}}$ si $k = K_{p-1}+1$ pour un certain $p \in [1, s]$, est alors une application de N(h) dans l'ensemble $\{x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_d}\}$.

Soit eg cette application. Alors

LEMME 4.1. - $eg \in E(h)$ *et l'application* $e : G(h) \longrightarrow E(h)$ *une surjection.*

PREUVE. - Soit pour $1 \leqslant t \leqslant d$, $k_1, k_2, \ldots, k_{n_t}$ les n_t indices k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ tels que $x_{u_k} = x_{u_t}$. Alors x_{v_k} est l'image du couple $(x_{v_{k+1}}, \gamma_{k+1}\theta g)$ si $k \neq K_p$ pour tout $p \in [1, s]$ et du couple $(x_{v_{K_{p-1}+1}}, \gamma_{K_{p-1}}\theta g)$ si $k = K_p$ $(k = k_1, k_2, \ldots, k_{n_t})$.

Nous avons donc bien

$$\textbf{card}\{x : (eg)^{-1} x = x_{u_t}\} = n_t \quad (1 \leqslant t \leqslant d)$$

Pour la seconde propriété, soit ψ un élément de E(h) ; nous allons construire un mot g tel que $eg = \psi$.

Si $r = 1$, G(h) et E(h) sont réduits à un seul élément et le résultat est évident. Pour $r > 1$, posons $q_r = d$ et $f_{r+1} = 1$ (mot unité) et soit pour $2 \leqslant k \leqslant r$,

$$f_k = x_{u_{q_k}} x_{u_{q_{k+1}}} \ldots x_{u_{q_r}}$$

$$m_k = n_{q_k} - (\alpha f_{k+1})(x_{u_{q_k}})$$

w_k l'entier tel que $x_{u_{w_k}} = \psi(x_{u_{q_k}}, m_k)$

et $m'_k = n_{w_k} - (\alpha f_k)(x_{u_{w_k}})$.

Alors on pose

$$q_{k-1} = w_k \qquad \text{si } m'_k > 0$$

et $$= \max \{q : n_q - (\alpha f_k)(x_{u_q}) > 0\} \qquad \text{si } m'_k = 0.$$

Soit s le nombre des indices k pour lesquels $m'_k = 0$ et désignons par $K_{s-1}+1,\ K_{s-2}+1, \ldots,\ K_o+1$ $(K_o = 0)$ la suite décroissante des k pour lesquels $m'_k = 0$. Posons aussi $K_s = r$.

Formons

$$y_{l_p} = \theta^{-1}\, x_{u_{q_{K_{p-1}+1}}}\, x_{u_{q_{K_{p-1}+2}}} \ldots x_{u_{q_{K_p}}} \in \mathcal{Y} \qquad (1 \leqslant p \leqslant s)$$

et

$$g = y_{l_1}\, y_{l_2} \ldots y_{l_s}.$$

Puisque $\gamma_k\, \theta g = n_{q_k} - (\alpha f_{k+1})(x_{u_{q_k}})$ on a bien $m_k = \gamma_k\, \theta g$ pour tout $k \in [1, r]$. D'où par définition de w_k, $\psi(x_{u_{q_k}}, \gamma_k\, \theta g) = x_{u_{q_{k-1}}}$ si $k \neq K_{p-1}+1$ pour tout $p \in [1, s]$ et on peut vérifier ensuite que $\psi(x_{u_{q_k}}, \gamma_k \theta g) = x_{u_{K_p}}$ si $k = K_{p-1}+1$.

Lorsque $eg = \psi$, nous dirons alors que g est une *représentation en cycles* de ψ.

Le prochain lemme généralise les propriétés des cycles disjoints dans le cas des permutations, à savoir dans ce cas que les cycles ne sont définis qu'à une permutation circulaire près de leurs éléments et que le produit des cycles est commutatif.

LEMME 4.2. - *Soit* $g = y_{l_1} y_{l_2} \ldots y_{l_s}$ *un mot de* $G(h)$ tel que θy_{l_p} *soit multilinéaire pour un certain* $p \in [1, s]$; *soit* $\theta y'$ *un mot de la classe des conjugués de* θy_{l_p} *et* g' *le mot de* $\mathcal{Y}$ *obtenu en substituant dans* g *la lettre* y' *à la lettre* y_{l_p}.

Alors $eg = eg'$.

De même, si $g = y_{l_1} y_{l_2} \ldots y_{l_s}$ $(s > 1)$ *est tel que les mots* θy_{l_p} *et* $\theta y_{l_{p+1}}$ *de* $\mathcal{X}^*$ *sont disjoints pour* $p \in [1, s-1]$ *et si* g' *est le mot de* $\mathcal{Y}^*$ *obtenu en permutant dans* g *les deux lettres* y_{l_p} *et* $y_{l_{p+1}}$, *alors* $eg = eg'$.

PREUVE. - Posons $K_o = 0$ $K_p = \lambda\theta y_{l_1} + \ldots + \lambda\theta y_{l_p}$ $(1 \leqslant p \leqslant s)$

$$\theta g = x_{v_1} x_{v_2} \dots x_{v_r}$$

et

$$\theta g' = x_{v'_1} x_{v'_2} \dots x_{v'_r}$$

Trivialement, les restrictions de eg et eg' aux éléments (x_{u_t}, m_t) tels que

$$(x_{u_t}, m_t) = (x_{v_k}, \gamma_k \theta g) = (x_{v'_k}, \gamma_k \theta g')$$

$$1 \leqslant k \leqslant K_{p-1} \quad (\text{si } p > 1) \quad \text{et} \quad K_p < k \leqslant r \quad (\text{si } p < s)$$

sont égales.

Ensuite $\theta y'$ se déduisant de θy_l par une permutation circulaire, si $x_{v_k} = x_{u_t}$ $(K_{p-1} + 1 \leqslant k \leqslant K_p)$ il existe un et un seul k' $(K_{p-1} + 1 \leqslant k' \leqslant K_p)$ tel que $x_{v'_{k'}} = x_{v_k} = x_{u_t}$ et si $x_{v_{k-1}}$ (resp. $x_{v_{K_p}}$) $= x_{u_{t'}}$ si $k \neq K_p$ (resp. $k = K_{p-1} + 1$) on a aussi

$$x_{v'_{k'-1}} \quad (\text{resp. } x_{v'_{K_p}}) = x_{u_{t'}} \quad \text{si} \quad k' \neq K_p \quad (\text{resp. } k' = K_{p-1} + 1).$$

Enfin, puisque θy_{l_p} et $\theta y'$ sont multilinéaires, on a forcément $\gamma_k \theta g = \gamma_{k'} \theta g$ pour le précédent couple (k, k').

D'où la première propriété.

Pour la deuxième propriété, observons que

$$(\alpha \theta y_{l_{p+1}})(x_{v_k}) = 0 \quad \text{pour tout} \quad k \in [K_{p-1}+1, K_p] \quad (4.2.1)$$

et de même

$$(\alpha \theta y_{l_p})(x_{v_k}) = 0 \quad \text{pour tout} \quad k \in [K_p + 1, K_{p+1}] \quad (4.2.2)$$

Or

$$\gamma_k \theta g = (\alpha \theta y_{l_1} \dots y_{l_{p-1}})(x_{v_k}) + (\alpha \theta y_{l_p})(x_{v_k}) + (\alpha x_{v_{K_p+1}} \dots x_{v_k})(x_{v_k})$$

pour $k \in [K_p + 1, K_{p+1}]$

(le premier terme du second membre disparaissant si $p = 1$).

Pour $k' = k - \lambda \theta y_{l_p}$ $(K_p + 1 \leqslant k \leqslant K_{p+1})$, on a

$$\gamma_{k'} \theta g' = (\alpha \theta y_{l_1} \dots y_{l_{p-1}})(x_{v'_{k'}}) + (\alpha x_{v'_{K_{p-1}+1}} \dots x_{v'_{k'}})(x_{v'_{k'}})$$

et de

$$x_{v'_{K_{p-1}+1}} \dots x_{v'_{k'}} = x_{v_{K_{p+1}}} \dots x_{v_k}$$

il résulte que

$$\gamma_k \theta g = \gamma_{k'} \theta g'$$

en vertu de (4.2.1).

On a pareillement

$$\gamma_k \theta g = \gamma_{k'} \theta g' \quad \text{où} \quad k \in [K_{p-1} + 1 , K_p] \quad \text{et} \quad k' = k + \lambda\theta y_{l_{p+1}} .$$

4.3. L'opérateur δ.

Dans la présente section, nous introduisons un opérateur $\delta : \mathcal{Y}^* \longrightarrow \mathcal{Y}^*$ qui nous permettra d'obtenir pour toute fonction ψ de E(h) une représentation en cycles $g = y_{l_1} y_{l_2} \dots y_{l_s}$ où tous les θy_{l_p} $(1 \leqslant p \leqslant s)$ sont multilinéaires $(\in \mathfrak{M})$.

Soit $y \in \mathcal{Y}$ et posons $\theta y = x_{v_1} x_{v_2} \dots x_{v_r} \in \mathfrak{X}^*$. Si $y \notin \theta^{-1}\mathfrak{M}$, nous désignons par k' $(1 \leqslant k' < r)$ le plus grand entier tel que

$$(\alpha x_{v_k}, x_{v_{k'+1}} \dots x_{v_r}) (x_{v_{k'}}) = 2$$

et par k'' l'indice tel que $x_{v_{k''}} = x_{v_{k'}}$ $(k' < k'' \leqslant r)$.

Nous posons alors

$$\underline{\delta} y = \theta^{-1} x_{v_1} \dots x_{v_{k'}} x_{v_{k''+1}} \dots x_{v_r} \quad \text{si} \quad k'' < r$$
$$= \theta^{-1} x_{v_1} \dots x_{v_{k'}} \quad \text{si} \quad k'' = r$$

et $\bar{\delta} y = \theta^{-1} x_{v_{k'+1}} \dots x_{v_{k''}}$.

Par définition même de k', on a

$$(\alpha x_{v_{k'+1}} \dots x_{v_r}) (x_{v_k}) = 1$$

pour tout $k \in [k' + 1 , r]$.

D'où en particulier, le mot $x_{v_{k'+1}} \dots x_{v_{k''}} = \theta\bar{\delta} y$ est multilinéaire. $(\bar{\delta} y \in \theta^{-1}\mathfrak{M})$.

On pose alors

$$\delta y = \underline{\delta} y \cdot \bar{\delta} y$$

et nous étendons cette définition au cas où $y \in \theta^{-1}\mathfrak{M}$ en posant

$$\delta y = y = \underline{\delta} y \,.\, \bar{\delta}\, y = \underline{\delta} y$$

avec $\bar{\delta}\, y = 1$ (mot unité de $\mathfrak{Y}^*$) ; enfin, pour $n > 0$ $\delta^n y$ est défini par

$$\delta^n y = \underline{\delta}^n y \,.\, \bar{\delta}\delta^{n-1}\, y \,.\cdots.\, \bar{\delta}\, \underline{\delta} y \,.\, \bar{\delta}\, y \,.$$

Nous avons alors

$$0 < \lambda\theta \underline{\delta} y \leqslant \lambda\theta y \tag{4.3.1}$$

et

$$\lambda\theta \underline{\delta} y < \lambda\theta y \Longleftrightarrow \theta y \notin \mathfrak{M} \,. \tag{4.3.2}$$

De là, la suite des entiers

$$\lambda\theta y \,,\ \lambda\theta \underline{\delta}\, y \,,\ \lambda\theta \underline{\delta}^2 y \,,\ldots,\ \lambda\theta \underline{\delta}^n y \,,\ldots$$

est non croissante et bornée inférieurement par 0 et les relations (4.3.1) et (4.3.2) entraînent alors qu'il existe un entier $n_o \geqslant 0$ tel que pour $n \geqslant n_o$

$$\lambda\theta \underline{\delta}^n y = \lambda\theta \underline{\delta}^{n_o} y \,,$$

soit alors

$$\underline{\delta}^{n_o} y \in \theta^{-1}\mathfrak{M} \,.$$

Si nous choisissons n_o comme le plus petit entier ayant cette propriété,

alors le mot $$\underline{\delta}^{n_o} y \,.\, \bar{\delta}\, \underline{\delta}^{n_o-1}\, y \,.\cdots.\, \bar{\delta}\, \underline{\delta} y \,.\, \bar{\delta}\, y = \delta^{n_o} y \tag{4.3.3}$$

a toutes ses lettres $\in \theta^{-1}\mathfrak{M}$.

Si donc pour $g = y_{l_1}\, y_{l_2} \ldots y_{l_s} \in \mathfrak{Y}^*$ nous posons $\delta_p g = g$ si $p > s$ ou si $y \in \theta^{-1}\mathfrak{M}$ et

$$\delta_p g = y_{l_1}\, y_{l_2} \cdots y_{l_{p-1}} \,.\, \delta y_{l_p} \,.\, y_{l_{p+1}} \cdots y_{l_s}$$

$(y_{l_o} = y_{l_{s+1}} = 1$ (mot unité de $\mathfrak{Y}^*))$

- ce que nous ferons désormais -

nous avons pour $1 \leqslant p \leqslant s$, en utilisant les notations ci-dessus

$$\delta_p^n g = y_{l_1} y_{l_2} \cdots y_{l_{p-1}} \cdot \delta^n y_{l_p} \cdot y_{l_{p+1}} \cdots y_{l_s}$$

pour tout $n > 0$.

Ainsi en vertu de (4.3.3) nous obtenons

LEMME 4.3.- *Pour tout* $g = y_{l_1} y_{l_2} \cdots y_{l_s} \in \mathcal{Y}^*$ *il existe* s *entiers* $\geqslant 0$ $n_{o_1}, n_{o_2}, \ldots n_{o_s}$ *tels que le mot* $\delta_1^{n_{o_1}} \delta_2^{n_{o_2}} \cdots \delta_s^{n_{o_s}} g$ *a toutes les lettres* $\in \theta^{-1}\mathfrak{M}$.

Notre but maintenant va être de montrer que si g est une représentation en cycles d'une application $\psi \in E(h)$ alors $\delta_p g$ est aussi une représentation en cycles de ψ pour tout $p \geqslant 1$. Il en résultera alors, d'après le lemme précédent, que toute application admet une représentation en cycles $g = y_{l_1} y_{l_2} \cdots y_{l_s}$ où tous les θy_{l_p} $(1 \leqslant p \leqslant s) \in \mathfrak{M}$. Il nous suffit donc de montrer le.

LEMME 4.4.- $ey = e\delta y$ *pour tout* $y \in \mathcal{Y}$.

PREUVE.- En reprenant les mêmes notations que celles introduites pour la définition de δ, nous avons, en posant $\theta\delta y = x_{v'_1} x_{v'_2} \cdots x_{v'_r}$,

$$f_1 = x_{v_1} \cdots x_{v_{k'}} = x_{v'_1} \cdots x_{v'_{k'}}$$

$$f_2 = x_{v_{k'+1}} \cdots x_{v_{k''}} = x_{v'_{r-k''+k'+1}} \cdots x_{v'_r}$$

et $$f_3 = 1 \quad \text{si} \quad k'' = r$$

$$= x_{v_{k''+1}} \cdots x_{v} = x_{v'_{k'+1}} \cdots x_{v'_{r-k''+k'}} \text{ si } k'' < r,$$

$$\theta y = f_1 f_2 f_3$$

$$\underline{\delta} y = f_1 f_3$$

et $$\overline{\delta} y = f_2.$$

Si $f_3 \neq 1$, par définition même de k' et de k'', les deux mots f_2 et f_3 sont disjoints et multilinéaires ; on a donc

$$(x_{v_k}, \gamma_k \theta y) = (x_{v'_{k'+k-k''}}, \gamma_{k'+k-k''} \theta\delta y) \quad k''+1 \leqslant k \leqslant r. \quad (4.3.4)$$

D'autre part, on a toujours

$$(x_{v_k},\ \gamma_k \theta y) = (x_{v'_k},\ \gamma_k \theta \delta y) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant k'$$

$$= (x_{v'_{r-k''+k}},\ \gamma_{r-k''+k}\ \theta \delta y) \quad \text{pour} \quad k'+1 < k < k''. \quad (4.3.5)$$

La fonction $e\delta y$ appliquée au couple $(x_{v'_1},\ \gamma_1 \theta \delta y)$ donne

$$(e\delta y)\ (x_{v'_1},\ \gamma_1 \theta \delta y) = x_{v'_{r-k''+k'}} = x_{v_r} \quad (\text{si} \quad k'' < r) \quad (4.3.6)$$

$$= x_{v_{k'}} \quad (\text{si} \quad k'' = r)\ ;$$

mais dans ce dernier cas on a aussi

$$= x_{v_r} \quad \text{puisque} \quad x_{v_r} = x_{v_{k''}} = x_{v_{k'}}\ ;$$

d'autre part,

$$(eg)\ (x_{v_1},\ \gamma_1 \theta y) = x_{v_r}\ .$$

La relation (4.3.5) pour $k = 1$ donne alors

$$(eg)\ (x_{v_1},\ \gamma_1 \theta y) = (e\delta y)\ (x_{v_1},\ \gamma_1 \theta y). \quad (4.3.7)$$

Si $k' > 1$ la relation (4.3.5) pour $1 < k \leqslant k'$ entraîne bien évidemment

$$(e\delta y)\ (x_{v'_k},\ \gamma_k \theta \delta y) = x_{v'_{k-1}} = x_{v_{k-1}} = (ey)\ (x_{v_k},\ \gamma_k \theta y)\ ;$$

d'où

$$(e\delta y)\ (x_{v_k},\ \gamma_k \theta y) = (ey)\ (x_{v_k},\ \gamma_k \theta y) \quad (4.3.8)$$

pour $1 < k \leqslant k'$.

Si $k'' < r$ on a $(ey)\ (x_{v_{k''+1}},\ \gamma_{k''+1}\ \theta y) = x_{v_{k''}}$ par définition de ey et

$$(e\delta y)\ (x_{v'_{k'+1}},\ \gamma_{k'+1}\ \theta y)$$

$$= x_{v'_{k'}}\ .$$

Ainsi, de l'égalité $x_{v'_{k'}} = x_{v_{k'}} = x_{v_{k''}}$ et de la relation (4.3.4) pour $k = k'' + 1$, on déduit

$$(ey)\ (x_{v_{k''+1}},\ \gamma_{k''+1}\ \theta y) = (e\delta y)\ (x_{v_{k''+1}},\ \gamma_{k''+1}\ \theta y). \quad (4.3.9)$$

Si $k'' + 1 < r$, la relation (4.3.4) pour $k'' + 1 < k \leqslant r$ et la définition de ey et $e\delta y$ entraînent

$$(ey)\,(x_{v_k},\ \gamma_k\,\theta y) = x_{v_{k-1}} = x_{v'_{k'+k-1-k''}} = (e\,\delta y)\,(x_{v'_{k'+k-k''}},\ \gamma_{k'+k-k''}\,\theta\,\delta\,y).$$

D'où

$$(ey)\,(x_{v_k},\ \gamma_k\theta y) = (e\,\delta y)\,(x_{v_k},\ \gamma_k\,\theta y) \qquad k'' + 1 \leqslant k \leqslant r. \quad (4.3.10)$$

Reste à considérer le cas où $k \in [k' + 1,\ k'']$.

Tout d'abord

$$(ey)\,(x_{v_{k'+1}},\ \gamma_{k'+1}\ \theta y) = x_{v_{k'}},$$

et

$$(e\,\delta y)\,(x_{v_{r-k''+k'+1}},\ \gamma_{r-k''+k'+1}\ \theta\,\delta y) = x_{v'_r}.$$

Dès lors, de l'égalité $x_{v'_r} = x_{v_{k''}} = x_{v_{k'}}$ et de la relation (4.3.5) pour $k = k' + 1$, on déduit

$$(ey)\,(x_{v_{k'+1}},\ \gamma_{k'+1}\ \theta y) = (e\,\delta y)\,(x_{v_{k'+1}},\ \gamma_{k'+1}\theta y). \quad (4.3.11)$$

Si enfin $k' + 1 < k''$, la relation (4.3.5) pour $k' + 1 < k \leqslant k''$ et la définition de ey et $e\,\delta y$ entraînent

$$(ey)\,(x_{v_k},\ \gamma_k\,\theta y) = x_{v_{k-1}} = x_{v'_{r-k''+k-1}} = (e\,\delta y)\,(x_{v'_{r-k''+k}},\ \gamma_{r-k''+k}\ \theta\,\delta y).$$

Soit

$$(ey)\,(x_{v_k},\ \gamma_k\,\theta y) = (e\,\delta y)\,(x_{v_k},\ \gamma_k\,\theta y) \qquad (4.3.12)$$

pour $k' + 1 < k \leqslant k''$.

Ainsi les relations (4.3.7) à (4.3.12) entraînent que les fonctions ey et $e\,\delta y$ sont identiques.

Pour toute application ψ de $E(h)$ nous pouvons ainsi construire une représentation en cycles $g = y_{l_1}\,y_{l_2} \ldots y_{l_s}$ où tous les $\theta\,y_{l_p} \in \mathfrak{M}$ $(1 \leqslant p \leqslant s)$.

Il nous suffit pour cela de construire une représentation en cycles quelconque de ψ, ce que nous pouvons faire d'après le lemme 4.1. - soit $g = y_{l_1}\,y_{l_2} \ldots y_{l_s}$ - et d'y appliquer l'opérateur $\delta_1^n\,\delta_2^n \ldots \delta_s^n$ pour n suffisamment grand, d'après le lemme 4.3.

Lorsqu'une représentation en cycles $g = y_{l_1}\,y_{l_2} \ldots y_{l_s}$ est telle que $\theta\,y_{l_p} \in \mathfrak{M}$ $(1 \leqslant p \leqslant s)$ nous dirons que g est une *représentation en cycles multilinéaires*.

Exemple.- Soit le mot $\theta y = cadbcda$ de $\mathfrak{X}^*$ où $\mathfrak{X} = \{a,b,c,d\}$. Le mot y de $\mathfrak{Y}^*$ est une représentation en cycles de l'application ψ de l'ensemble $\{(a,1), (a,1), (b,1), (c,1) (c,2), (d,1), (d,2)\}$ sur $\{a, b, c, d\}$ définie par

$$\psi(c,1) = a \; ; \; \psi(a,1) = c \; ; \; \psi(d,1) = a \; ; \; \psi(b,1) = d$$

$$\psi(c,2) = b \; ; \; \psi(d,2) = c \; ; \; \psi(a,2) = d$$

Nous avons, en reprenant les notations ci-dessus

$$f_1 = cad \qquad f_2 = bcd \qquad f_3 = a$$

D'où

$$\delta y = \theta^{-1} \, cada. \, \theta^{-1} \, bcd$$

Et nous pouvons encore vérifier que δy est aussi une représentation en cycles de ψ.

En appliquant δ_1 à δy, on a

$$\delta_1 \delta y = \theta^{-1} \, ca \, . \, \theta^{-1} \, da \, . \, \theta^{-1} \, bcd$$

mot de $\mathfrak{Y}^*$ qui a toutes ses lettres $\in \theta^{-1}\mathfrak{M}$.

Toute fonction ψ de $E(h)$ admettant (au moins) une représentation en cycles multilinéaires, le prochain résultat montre comment on peut passer de l'une d'elles à une autre.

4.4. Les opérateurs τ.

Soit τ'' l'application qui au mot $f = x_{v_1} x_{v_2} \ldots x_{v_r}$ de $\mathfrak{M}$ associe le mot $f' = x_{v_2} x_{v_3} \ldots x_{v_r} x_{v_1}$ si $r > 1$ et f si $r = 1$.

Désignons par $\tau' = \theta^{-1} \tau'' \theta$ l'opérateur de $\theta^{-1}\mathfrak{M}$ sur lui-même et posons pour $g = y_{l_1} y_{l_2} \ldots y_{l_s} \in (\theta^{-1}\mathfrak{M})^*$, $(\theta^{-1}\mathfrak{M})^*$ étant le sous-monoïde de $\mathfrak{Y}^*$ engendré par $\theta^{-1}\mathfrak{M}$,

$$\tau'_p g = g \quad \text{si} \quad p > s \; ;$$

$$\tau'_p g = y_{l_1} \ldots y_{l_{p-1}} \cdot \tau' y_{l_p} \cdot y_{l_{p+1}} \ldots y_{l_s} \quad \text{si} \quad 1 \leqslant p \leqslant s$$

et

$$\tau_p g = g \qquad \text{si} \quad p \geqslant s$$

ou pour $1 \leqslant p \leqslant s-1$ si les deux mots θy_{l_p} et $\theta y_{l_{p+1}}$ sont non disjoints ; enfin

$$\tau_p g = y_{l_1} \cdots y_{l_{p-1}} y_{l_{p+1}} y_{l_p} y_{l_{p+2}} \cdots y_{l_s}$$

si $1 \leqslant p \leqslant s-1$ et θy_{l_p} et $\theta y_{l_{p+1}}$ disjoints.

Les τ_p' et τ_p engendrent de façon naturelle un monoïde d'opérateurs $T = \{\tau_p , \tau_p'\}$ de $(\theta^{-1}\mathfrak{M})^*$ sur lui-même.

D'après le lemme 4.2. nous avons

$$e\tau g = e\, g \quad \text{pour tout} \quad \tau \in T .$$

Réciproquement, si g est une représentation en cycles multilinéaires de $\psi \in E(h)$, alors toutes ses autres représentations en cycles multilinéaires sont données par $\{\tau g : \tau \in T\}$ ou encore

PROPOSITION 4.1. - *Si* g *et* g' *sont deux mots de* $(\theta^{-1}\mathfrak{M})^*$ *alors* $eg = eg'$ *si et seulement s'il existe un opérateur* τ *de* T *tel que*

$$g' = \tau g .$$

PREUVE.- La condition est suffisante d'après le lemme 4.2. Montrons qu'elle est aussi nécessaire. Soit donc

$$g = y_{l_1} y_{l_2} \cdots y_{l_s} \quad \text{et} \quad g = y_{l_1'} y_{l_2'} \cdots y_{l_{s'}'},$$

deux mots de $(\theta^{-1}\mathfrak{M})^*$ tels que $eg = eg'$.

Posons

$$K_o = 0 \qquad K_p = \lambda\theta y_{l_1} + \ldots + \lambda\theta y_{l_p} \qquad 1 \leqslant p \leqslant s$$

$$K_o' = 0 \qquad K_p' = \lambda\theta y_{l_1'} + \ldots + \lambda\theta y_{l_p'} \qquad 1 \leqslant p \leqslant s'$$

$$\theta g = x_{v_1} x_{v_2} \cdots x_{v_r}$$

et

$$\theta g' = x_{v_1'} x_{v_2'} \cdots x_{v_r'} .$$

Soit alors q le plus petit entier tel que θy_{l_1} et $\theta y_{l_q'}$ ne soient pas disjoints.

q est bien défini puisque g et g' ont en particulier même image abélienne.

Nous allons montrer que si t et t' sont deux entiers $1 \leqslant t \leqslant \lambda\theta y_{l_1}$ et $1 \leqslant t' \leqslant \lambda\theta y_{l'_q}$ tels que

$$x_{v_t} = x_{v'_{t'+K_{q-1}}} \tag{4.4.1}$$

(il en existe d'après la définition même de q), alors

$$x_{v_{t-1}} \text{ (ou } x_{v_{K_1}} \text{ si } t = 1) = x_{v'_{K_{q-1}+t'-1}} \tag{4.4.2}$$

(ou $x_{v'_{K_q}}$ si $t' = 1$).

Il s'ensuivra que θy_{l_1} et $\theta y_{l'_q}$ seront conjugués puisque θy_{l_1} et $\theta y_{l'_q}$ sont multilinéaires donc primitifs.

Soit donc deux entiers t et t' ayant la propriété (4.4.1). Tout d'abord

$$\gamma_k \theta g = 1 \quad \text{pour tout} \quad k \in [1, K_1] \quad \text{puisque} \quad \theta y_{l_1}$$

est multilinéaire, et d'autre part

$$\gamma_{t'+K_{q-1}} \theta g' = 1$$

puisque $\theta y_{l'_q} \in \mathfrak{M}$ et si $q > 1$, θy_{l_1} et $\theta y_{l'_p}$ sont disjoints pour tout $p \in [1, q-1]$.

Mais puisque $eg = eg'$, on a

$$\begin{aligned} x_{v_{t-1}} \text{ (ou } x_{v_{K_1}} \text{ si } t = 1) &= (eg)(x_{v_t}, \gamma_t \theta g) = (eg)(x_{v_t}, 1) \\ &= (eg')(x_{v'_{K'_{q-1}+t'}}, 1) = (eg')(x_{v'_{K'_{q-1}+t'}}, \gamma_{K_{q-1}+t'} \theta g') \\ &= x_{v'_{t-1}} \text{ (ou } x_{v'_{K'_q}} \text{ si } t' = 1). \end{aligned}$$

D'où la propriété (4.4.2).

Les mots θy_{l_1} et $\theta y_{l'_q}$ sont donc conjugués ou encore

$$\tau'^n y_{l'_q} = y_{l_1}$$

pour un certain $n > 0$.

Si $q > 1$, θy_{l_1} et $\theta y_{l'_p}$ sont disjoints pour tout $p \in [1, q-1]$; les deux mots

g et $g'' = \tau_1'^{n}\, \tau_1\, \tau_2 \ldots \tau_{q-1}\, g'$ (ou $\tau_1'^{n}\, g'$ si $q = 1$)

ont alors leurs premières lettres égales.

Si $s = 1$, θg est alors lui-même multilinéaire et on a nécessairement

$$q = s' = 1 .$$

D'où

$$g = y_{l_1} = \tau'^{n} y_{l'_1} = \tau_1'^{n} g' .$$

Il suffit donc de montrer le résultat par récurrence sur s en supposant $1 < s \leqslant s'$.

Avec les notations ci-dessus, les mots

$$g = y_{l_1}\, y_{l_2} \ldots y_{l_s} \quad \text{et} \quad g'' = y_{l_1}\, y_{l'_1} \ldots y_{l'_{q-1}} \cdot y_{l'_{q+1}} \ldots y_{l'_s},$$

$$\text{ou} \quad y_{l_1}\, y_{l'_2} \ldots y_{l'_s} \quad \text{si } q = 1 ,$$

ont leurs premières lettres égales ; soit

$$g = y_{l_1}\, g''' \qquad \text{et} \qquad g'' = y_{l_1}\, g'^{v} .$$

d'où $eg''' = eg'^{v}$.

Comme $\lambda\, g''' = s - 1$, on applique la récurrence au couple (g''', g'^{v}) et le résultat suit.

4.5. Le monoïde $\mathcal{C}$.

Nous supposons désormais que $\mathfrak{X}$ est totalement ordonné. La classe abélienne $\alpha^{-1}h$ $(h \in \overline{\mathfrak{X}}^{*+})$ contient alors un élément non décroissant $\beta' h$. En reprenant les mêmes notations qu'au début du paragraphe 4.2 et en supposant $x_{u_1} < x_{u_2} < \ldots < x_{u_d}$ nous avons

$$\beta' h = x_{u_1}^{n_1} x_{u_2}^{n_2} \ldots x_{u_d}^{n_d} \quad \text{que nous posons égal aussi à}$$

$$= x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r} .$$

Tout mot $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ de $\alpha^{-1} h$ induit alors une application πf de $E(h)$ si l'on pose

$$(\pi f)\ (x_{j_k}\ ,\ \gamma_k\ \beta' h) = x_{i_k} \qquad (1 \leqslant k \leqslant r)\ . \tag{4.5.1}$$

Réciproquement, à toute application ψ de $E(h)$ correspond un et un seul mot f de $\alpha^{-1}h$ tel que $\pi f = \psi$; ce mot f est le seul mot $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ tel que

$$x_{i_k} = \psi\,(x_{u_t}\ ,\ m_t)$$

où t et m_t sont définis comme les entiers satisfaisant à

$$n_1 + \ldots + n_{t-1} < k \leqslant n_1 + \ldots + n_t$$

et

$$m_t = k - (n_1 + \ldots + n_{t-1})$$

(on posera $n_o = 0$).

π est alors une bijection de $\alpha^{-1} h$ sur $E(h)$. Posons

$$\rho = \pi^{-1} e : G(h) \longrightarrow \alpha^{-1} h\ .$$

Alors, d'après le lemme 4.1, ρ est une surjection. De plus, d'après le lemme 4.3, pour tout $f \in \alpha^{-1} h$, $\rho^{-1} f \cap (\theta^{-1}\mathfrak{M})^*$ n'est pas vide et si g est un élément quelconque de cet ensemble, alors

$$\rho^{-1} f \cap (\theta^{-1}\ \mathfrak{M})^* = \{g' : g' = \tau g\ ,\ \tau \in T\}$$

d'après la proposition 4.1.

Nous allons réunir tous ces résultats dans une proposition.

PROPOSITION 4.2. - *A tout mot* $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ *de* $\mathfrak{X}^{*+}$ *on peut associer un sous-ensemble* $U_f = \rho^{-1} f \cap (\theta^{-1}\ \mathfrak{M})^*$ *de* $\mathfrak{Y}^*$ *tel que si* $g = y_{l_1}\ y_{l_2} \ldots y_{l_s} \in U_f$, *alors*

(i) $\alpha\theta g = \alpha f$

(ii) $\theta y_{l_p} \in \mathfrak{M}$ $(1 < p < s)$

(iii) *si l'on pose* $\beta f = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r}$ *et*

$$\theta y_{l_p} = x_{v_{K_{p-1}+1}}\ x_{v_{K_{p-1}+2}} \ldots x_{v_{K_p}} \qquad (1 \leqslant p \leqslant s\ ;\ K_o = 0),$$

il correspond à tout $k \in [1\ ,\ r]$ *un et un seul* $k' \in [1\ ,\ r]$ *tel que*

$$(x_{j_k}\ ,\ \gamma_k\ \beta f) = (x_{v_{k'}}\ ,\ \gamma_{k'}\ \theta g) \tag{4.5.2}$$

et

$$x_{i_k} = x_{v_{k'-1}} \quad si \quad k' \neq K_{p-1} + 1$$

pour tout $p \in [1, s]$

$$= x_{v_{K_p}} \quad si \quad k' = K_{p-1} + 1 .$$

De plus, si $g = y_{l_1} y_{l_2} \cdots y_{l_s}$ *et*

$$g' = y_{l'_1} y_{l'_2} \cdots y_{l'_{s'}} \in U_f ,$$

alors

(iv) $s = s'$

(v) *il existe un mot* $g'' = y_{l''_1} y_{l''_2} \cdot y_{l''_s}$ $(\in U_f)$ *tel que* $\theta y_{l''_p}$ *et* θy_{l_p} *sont conjugués* $(1 \leqslant p \leqslant s)$ *et tel qu'on peut passer de la suite* $(\theta y_{l_1}, \theta y_{l_2}, \ldots, \theta y_{l_s})$ *à la suite* $(\theta y_{l''_1}, \theta y_{l''_2}, \ldots, \theta y_{l''_s})$ *par une suite d'opérations* τ *consistant à permuter deux mots consécutifs de la suite disjoints.*

Notre but va être maintenant de choisir canoniquement dans chaque sous ensemble U_f un élément privilégié, ce qui nous amènera plus loin à définir le monoïde $\mathfrak{C}$.

Mais établissons tout d'abord comment l'opération $\intercal$ introduite au chapitre 3 correspond au produit de juxtaposition dans $\mathcal{Y}^*$.

LEMME 4.5. - *Soit* f' *et* f'' *deux mots de* $\mathcal{X}^{**}$ *et* g' *et* g'' *respectivement deux éléments quelconques de* $\rho^{-1} f'$ *et* $\rho^{-1} f''$ *alors*

$$f' \intercal f'' = \rho(g' g'') . \qquad (4.5.4)$$

PREUVE.- Comme $\rho = \pi^{-1} e$, nous allons montrer

$$\pi(f' \intercal f'') = e(g' g'') .$$

Posons

$$f' = x_{i'_1} \cdots x_{i'_{r'}}, \quad f'' = x_{i''_1} \cdots x_{i''_{r''}}, \quad f = f' \intercal f'' = x_{i_1} \cdots x_{i_r}$$

$(r = r' + r'')$

$$\beta f' = x_{j'_1} \cdots x_{j'_{r'}}, \quad f'' = x_{j''_1} \cdots x_{j''_{r''}} \quad f = x_{j_1} \cdots x_{j_r}$$

$$g' = y_{l'_1} \cdots y_{l'_{s'}}, \quad g'' = y_{l''_1} \cdots y_{l''_{s''}} \quad g = g' g'' = y_{l_1} \cdots y_{l_s} \quad (s = s' + s'')$$

$\theta g' = x_{v'_1} \ldots x_{v'_{r'}}$, $\theta g'' = x_{v''_1} \ldots x_{v''_{r''}}$ et $\theta g = x_{v_1} \ldots x_{v_r}$

$h = \alpha(f' f'')$.

Soit aussi $x_{u1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_d}$ les $d = \dim h$ lettres x de $\mathfrak{X}$ pour lesquelles $hx > 0$. et posons

$$h x_{u_t} = n_t \quad (\alpha f')(x_{u_t}) = n'_t \quad (\alpha f'')(x_{u_t}) = n''_t \quad (1 \leqslant t \leqslant d).$$

Il nous faut prouver

$$(e(g' g''))(x_{u_t}, m_t) = (\pi(f' \top f''))(x_{u_t}, m_t)$$

pour tout $(x_{u_t}, m_t) \in N(h)$.

Soit donc (x_{u_t}, m_t) un couple de $N(h)$. Faisons-lui correspondre l'entier q $(1 \leqslant q \leqslant r)$ défini par

$$x_{v_q} = x_{u_t} \quad \text{et} \quad \gamma_q \theta g = m_t .$$

Si q satisfait $1 \leqslant q \leqslant r'$ (resp. $r' + 1 \leqslant q \leqslant r' + r''$) faisons correspondre à l'entier q l'entier q' $(1 \leqslant q' \leqslant r')$ (resp. q'' $(1 \leqslant q'' \leqslant r'')$) défini par

$$x_{v'_{q'}} \text{ (resp. } x_{v''_{q''}}) = x_{v_q}$$

et

$$\gamma_{q'} \theta g' \text{ (resp. } \gamma_{q''} \theta g'') = \gamma_q \theta g$$

c'est-à-dire $q' = q$ et $q'' = q - r'$.

Faisons alors correspondre à q' (resp. q'') l'entier w' (resp. w'') défini par

$$x_{j'_{w'}} = x_{v'_{q'}} \text{ (resp. } x_{j''_{w''}} = x_{v''_{q''}})$$

et

$$\gamma_{w'} f' = \gamma_{q'} \theta g' \text{ (resp. } \gamma_{w''} f'' = \gamma_{q''} \theta g'') ;$$

puis à w' (resp. w'') l'entier w

$$w = n''_1 + \ldots + n''_{w-1} + w' \text{ (resp. } n'_1 + \ldots n'_w + w'')$$

où W est le plus petit entier $(1 \leqslant W \leqslant d)$ satisfaisant

$$w' \leqslant n'_1 + \ldots + n'_W \text{ (resp. } w'' \leqslant n''_1 + \ldots + n''_W).$$

L'application $q \longrightarrow w$ est une permutation de $[1, r]$ et l'on a

$$(x_{u_t}, m_t) = (x_{v_q}, \gamma_q \theta g) = (x_{v'_{q'}}, \gamma_{q'} \theta g') \quad (\text{resp. } (x_{v''_{q''}}, \gamma_{q''} \theta g''))$$
$$= (x_{j'_{w'}}, \gamma_{w'} f') \quad (\text{resp. } (x_{j''_{w''}}, \gamma_{w''} f'')) = (x_{j_w}, \gamma_w f). \tag{4.5.5}$$

La dernière égalité provenant de la définition même de l'opération τ appliquée au couple (f, f').

Or

$$x_{v_{q-1}} = x_{v'_{q'-1}} \quad \text{ou} \quad x_{v_{K_p}} = x_{v'_{K'_p}} \quad \text{si} \quad 1 \leqslant q \leqslant r$$
$$p' = p$$

et

$$= x_{v''_{q''-1}} \quad \text{ou} \quad x_{v_{K_p}} = x_{v'_{K''_{p''}}} \quad \text{si} \quad r' + 1 \leqslant q \leqslant r' + r''$$
$$p'' = p - s'.$$

D'autre part, puisque

$$\rho g' = f' \qquad \text{et} \qquad \rho g'' = f''$$

on a

$$x_{v'_{q'-1}} = x_{i'_{w'}} \qquad \text{si} \qquad q' \neq K'_{p'-1} + 1$$

et

$$x_{v'_{K'_p}} = \qquad \text{si} \qquad q' = K'_{p'-1} + 1$$

et des identités analogues pour le couple (q'', w'').

Enfin, par définition de l'opération τ et de l'entier w

$$x_{i'_{w'}} \quad (\text{resp. } x_{i''_{w''}}) = x_{i_w}.$$

Soit en vertu des égalités (4.5.5)

$$e(g'g'')(x_{u_t}, m_t)$$

$$= x_{v_{q-1}} \qquad = x_{v_{K_p}} \qquad (\text{si } q = K_{p-1}+1)$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= x_{v'_{q'-1}} \qquad = x_{v''_{q''-1}} \qquad = x_{v''_{K''_{p''}}} \qquad = x_{v'_{K'_{p'}}}$$

$$(\text{si } 1 \leqslant q \leqslant r') \qquad (\text{si } r'+1 \leqslant q \leqslant r'+r'') \qquad (\text{si } 1 \leqslant q \leqslant r')$$

$$= x_{i'_{w'}} \qquad = x_{i''_{w''}} \qquad = x_{i'_{v'}}$$

$$= x_{i_w} = (\pi(f' \top f''))(x_{u_t}, m_t) .$$

Nous sommes déjà en mesure de compléter la première partie de la démonstration du théorème 3.2 à savoir

PROPOSITION 4.3. - $\mathfrak{M}$ *forme un système de générateurs de l'algèbre large* $\Omega[[\mathfrak{X}^*_\top]]$ *ou encore à tout* $f \in \mathfrak{X}^*$ *on peut associer une suite* $(f_1, f_2, \ldots, f_s)$ *d'éléments de* $\mathfrak{M}$ *tels que*

$$f = f_1 \top f_2 \top \ldots \top f_s .$$

PREUVE.- D'après la proposition 4.2, on peut toujours associer à $f \in \mathfrak{X}^*$ un élément $g = y_{l_1} y_{l_2} \ldots y_{l_s}$ tel que

$$\theta y_{l_p} \in \mathfrak{M} \quad (1 \leqslant p \leqslant s)$$

et tel que

$$\rho g = \rho y_{l_1} y_{l_2} \ldots y_{l_s} = f .$$

Posons

$$\rho y_{l_p} = f_p \quad (1 \leqslant p \leqslant s).$$

Alors on a $$f_1 \top f_2 \top \ldots \top f_s = f$$

en vertu du lemme 4.5 et de l'associativité de l'opération $\top$.

Supposons maintenant qu'il existe un sous-ensemble totalement ordonné $\mathfrak{S}_0$ de $\mathfrak{M}$ tel que toute classe de mots conjugués multilinéaires de $\mathfrak{X}^*$ a une intersection avec $\mathfrak{S}_0$ réduite à un seul

élément. Nous notons $S_0 f$ le mot de $\mathcal{S}_0$ conjugué à $f \in \mathcal{M}$ et posons $\mathcal{S} = \theta^{-1} \mathcal{S}_0$.

En fait, nous prendrons plus bas sur $\mathcal{X}^*$ l'ordre lexicographique induit soit par l'ordre de $\mathcal{X}$ soit par l'ordre inverse de $\mathcal{X}$ et pour ces ordres $\mathcal{S}_0$ sera l'ensemble des mots multilinéaires minimum dans leurs classes de conjugués.

Prenons sur $\mathcal{S}$ l'ordre induit par celui de $\mathcal{S}_0$:

$$g < g' \quad (\text{dans } \mathcal{S}) \Longleftrightarrow \theta g < \theta g' \quad (\text{dans } \mathcal{S}_0).$$

D'après la proposition 4.1, $\rho^{-1} f \cap \mathcal{S}^*$ est non vide pour tout $f \in \mathcal{X}^*$ et tous ses éléments ont même image abélienne (dans $\overline{\mathcal{Y}^*}$). On peut donc donner la

Définition 4.1. - Le mot $g = y_{l_1} y_{l_2} \dots y_{l_s}$ de $\rho^{-1} f \cap \mathcal{S}^*$ est *canonique* si $s = 1$ ou si $s > 1$ et

$$\begin{aligned} y_{l_1} &= \max\{\mathbf{P}g : g \in \rho^{-1} f \cap \mathcal{S}^*\} \\ y_{l_2} &= \max\{\mathbf{P}g : g \in \rho^{-1} \rho\, y_{l_2} \dots y_{l_s} \cap \mathcal{S}^*\} \\ &\dots \qquad\qquad \dots \\ y_{l_{s-1}} &= \max\{\mathbf{P}g : g \in \rho^{-1} \rho\, y_{l_{s-1}} y_{l_s} \cap \mathcal{S}^*\}. \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

La proposition 4.1. entraîne qu'il y a et un seul élément canonique dans chaque classe $\rho^{-1} f \cap \mathcal{S}^*$ et si $g = y_{l_1} y_{l_2} \dots y_{l_s}$ est un tel élément

$$y_{l_k} < y_{l_{k+1}} \Longrightarrow \theta\, y_{l_k} \quad \text{et} \quad \theta\, y_{l_{k+1}} \text{ sont non disjoints.}$$

L'élément canonique de $\rho^{-1} f \cap \mathcal{S}^*$ sera noté $C\,f$ et $f \longrightarrow Cf$ est ainsi une bijection de $\mathcal{X}^*$ sur l'ensemble des mots canoniques $\{C\,f : f \in \mathcal{X}^*\}$.

Nous définissons alors sur cet ensemble une opération notée $\circ$, en posant pour deux éléments canoniques

$$\begin{gathered} C\,f \quad \text{et} \quad C\,f' \qquad (f \text{ et } f' \in \mathcal{X}^*), \\ C\,f \circ C\,f' = C\,\rho\,(Cf \,.\, Cf') \end{gathered} \tag{4.5.7}$$

Soit $\mathcal{C}$ le couple formé par l'ensemble $\{C\,f : f \in \mathcal{X}^*\}$ et l'opération $\circ$. C'est alors un monoïde, propriété qui se déduit

immédiatement de l'associativité du produit de juxtaposition dans et de la définition de C et ρ, et l'on a

PROPOSITION 4.4. - $C : \mathfrak{X}_{\intercal}^{*} \longrightarrow \mathfrak{C}$ *est un isomorphisme.*

PREUVE.- Que C soit une bijection est une conséquence du fait que l'application ρ est surjective et que toute classe $\rho^{-1}f \cap \mathfrak{S}^{*}$ ne contient qu'un seul élément canonique.

Reste à vérifier $C(f \intercal f') = C f \circ C f'$.

En effet, dans le lemme 4.5 on a montré $f \intercal f' = \rho(gg')$ pour deux éléments quelconques g et g' respectivement $\in \rho^{-1} f$ et $\in \rho^{-1} f'$.

D'où en particulier

$$f \intercal f' = \rho(Cf \,.\, Cf')$$

et en appliquant C aux deux membres, on a

$$C(f \intercal f') = C\rho(Cf \,.\, Cf') = Cf \circ Cf'.$$

4.6. L'identité sur les ζ.

Dans cette section, nous complétons la démonstration du théorème 3.2 en prouvant l'identité (4.6.2) ci-dessous sur les ζ.

Montrons d'abord

LEMME 4.6. -

$$\zeta f = (-1)^{\lambda cf+1} \quad \textit{pour tout} \quad f \in \mathfrak{M}. \qquad (4.6.1)$$

PREUVE.- Soit

$$f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \in \mathfrak{M}$$

et $\beta f = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r}$ le mot non décroissant qui lui est associé.

Posons

$$C f = y_{l_1} y_{l_2} \ldots y_{l_s}.$$

C f est une représentation en cycles multilinéaires de l'application $(x_{j_k}, 1) \longrightarrow x_{i_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$.

De là, la permutation $i_k \longrightarrow j_k$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ est le produit de s cycles disjoints d'ordre $\lambda\theta y_{l_1}$, $\lambda\theta y_{l_2}$, ..., $\lambda\theta y_{l_s}$ respectivement.

Comme une permutation est paire ou impaire suivant que le nombre de ses cycles d'ordre pair est pair ou impair on a

$$\varepsilon_f = (-1)^{n_f}$$

où n_f est le nombre d'indices p $(1 \leqslant p \leqslant r)$ tels que $\lambda\theta y_{l_p}$ est pair.

Mais d'autre part,

$$\lambda f \equiv s - n_f \pmod 2$$

puisque la somme des longueurs des mots θy_{l_p} tels que $\lambda\theta y_{l_p}$ est pair est forcément paire.

D'où

$$n_f + \lambda f \equiv s \pmod 2$$

et

$$\zeta f = \varepsilon_f (-1)^{\lambda f+1} = (-1)^{n_f+\lambda f+1} = (-1)^{s+1} = (-1)^{\lambda Cf+1} .$$

Nous poserons pour $f \in \mathfrak{M}$, $\eta Cf = (-1)^{\lambda Cf+1} = \zeta f$.

Nous montrons enfin

PROPOSITION 4.5. - *Pour tout* $f \in \mathfrak{X}^{*+}$

$$\Sigma \zeta f_{m_1} \zeta f_{m_2} \ldots \zeta f_{m_t} = 1$$

où la somme est étendue à toutes les suites $f_{m_1}, f_{m_2}, \ldots, f_{m_t}$ *de* $\mathfrak{M}$ *telles que* $f = f_{m_1} \intercal f_{m_2} \ldots \intercal f_{m_t}$.

PREUVE.- Un sous-ensemble $\mathfrak{S}_o$ de $\mathfrak{M}$ ayant été choisi pour la définition des mots canoniques Cf $(f \in \mathfrak{X}^*)$ (voir définition 4.1) et posant $\mathfrak{S} = \theta^{-1}\mathfrak{S}_o$, nous avons, d'après la proposition 4.4

$$f = f_{m_1} \top f_{m_2} \top \dots \top f_{m_t}$$

si et seulement si

$$C\, f = C\, f_{m_1} \circ C\, f_{m_2} \circ \dots \circ C\, f_{m_t}$$

dans le monoïde $\mathfrak{C}$.

D'autre part, d'après le lemme 4.6, pour $f \in \mathfrak{M}$, on a

$$\eta C\, f = \zeta f .$$

Désignons par $\mathfrak{T}$ le sous-ensemble $C\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{C}$.

Il est donc équivalent de montrer que pour tout $f \in \mathfrak{X}^*$

$$\Sigma \eta C\, f_{m_1} . \eta C\, f_{m_2} . \dots . \eta C\, f_{m_t} = 1 \qquad (4.6.3)$$

où la somme est étendue à toutes les suites $C\, f_{m_1}$, $Cf_{m_2}, \dots, C\, f_{m_t}$ d'éléments de $\mathfrak{T}$ telles que

$$C\, f = C\, f_{m_1} \circ C\, f_{m_2} \circ \dots \circ C\, f_{m_t} .$$

$\mathfrak{T}$ est encore le sous-ensemble de $\mathfrak{S}^*$ contenant $\mathfrak{S}$ et les mots $g = y_{l_1} y_{l_2} \dots y_{l_s}$ $(s > 1)$ de $\mathfrak{Y}^*$ tels que $(\theta y_{l_1}, \theta y_{l_2}, \dots, \theta y_{l_s})$ forme une suite décroissante de mots de $\mathfrak{S}_0$ disjoints deux à deux, et pour $g \in \mathfrak{T}$ on a

$$\eta g = (-1)^{\lambda g + 1} .$$

Par définition de C, on a pour toute suite $(g_{m_1}, g_{m_2}, \dots, g_{m_t})$ d'éléments de $\mathfrak{T}$,

$$g_{m_1} . g_{m_2} . \dots . g_{m_t} = C\rho(g_{m_1} g_{m_2} \dots g_{m_t}) = C\, f$$

si et seulement si le mot $g_{m_1} g_{m_2} \dots g_{m_t} \in \rho^{-1} f$.

Pour tout $f \in \mathfrak{X}^*$, nous désignons alors par Rf l'ensemble des suites $(g_{m_1}, g_{m_2}, \dots, g_{m_t})$ d'éléments de $\mathfrak{T}$ tels que $g_{m_1} g_{m_2} \dots g_{m_t} \in \rho^{-1} f$ et nous allons montrer l'identité

$$\sum_{(g_{m_1}, g_{m_2}, \dots, g_{m_t}) \in Rf} \eta g_{m_1} . \eta g_{m_2} . \dots . \eta g_{m_t} = 1 \qquad (4.6.4)$$

pour tout $f \in \mathfrak{X}^*$.

Nous désignons par $R\{f/g_o\}$ l'ensemble des suites $(g_{m_2},\ldots, g_{m_t})$ de mots de $\mathfrak{C}$ tels que $g_o g_{m_2} \ldots g_{m_t} \in Rf$ pour un mot g_o fixé $\in \mathfrak{C}$.

Si $R\{f/g_o\}$ n'est pas vide, alors $R\{f/g_o\} = Rf'$ pour un certain f' de $\mathfrak{X}^*$ et l'on a $\lambda Cf' < \lambda Cf$.

En effet

$$\rho(g_o\, g_{m_2} \ldots g_{m_t}) = f \Longleftrightarrow f = f'' \top f'$$

avec $f'' = \rho\, g_o$ et $f' = \rho(g_{m_2} \ldots g_{m_t})$ d'après la proposition 4.4.

D'où $g_{m_2} \ldots g_{m_t} \in R\, f'$ et f' ne dépend pas de la suite $(g_{m_2},\ldots, g_{m_t})$ choisie puisque si $g_{m'_2} \ldots g_{m'_{t'}} \in R\{f/g_o\}$ on a encore $\rho(g_o\, g_{m'_2} \ldots g_{m'_{t'}}) = f$

d'où

$$\text{si } f''' = \rho(g_{m'_2} \ldots g_{m'_{t'}}),$$

$$f = f'' \top f' = f'' \top f''' \Longrightarrow f' = f'''.$$

Réciproquement, pour tout $(g_{m_2},\ldots, g_{m_t}) \in R\, f'$ et $g_o \in \mathfrak{C}$, en posant $\rho\, g_o = f''$,

$$f'' \top f' = \rho(g_o\, g_{m_2} \ldots g_{m_t})\ ;$$

d'où

$$(g_o\ ,\ g_{m_2},\ldots,\ g_{m_t}) \in Rf \quad \text{pour} \quad f = f'' \top f'.$$

Pour $f \in \mathfrak{X}^*$ nous définissons enfin l'ensemble

$$\mathfrak{R}f = \{y : y \in \mathfrak{S}\ ;\ y\mathfrak{Y}^* \cap \rho^{-1} f \cap \mathfrak{S}^* \neq \emptyset\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des $y \in \mathfrak{S}$ qui apparaissent comme première lettre d'une représentation en cycles $g \in \rho^{-1} f \cap \mathfrak{S}^*$.

Soit $p = \mathbf{card}\, \mathfrak{R} f$ et soit $y_1, y_2, \ldots, y_p$ ses p éléments rangés en ordre décroissant $(y_1 > y_2 > \ldots > y_p)$ pour l'ordre dans $\mathfrak{S}$. Il résulte alors de la proposition 4.1 que si $p > 1$, tous les mots $\theta y_1, \theta y_2, \ldots, \theta y_p$ sont disjoints deux à deux.

D'autre part, si $(g_{m_1}, g_{m_2},\ldots, g_{m_t}) \in R\, f$ avec

$$g_{m_1} = y_{q_1} y_{q_2} \ldots y_{q_n} \quad (n > 1),$$

alors les mots θy_{q_1} , θy_{q_2} , ... , θy_{q_n} sont disjoints deux à deux puisque $g_{m_1} \in \mathcal{C}$. Par suite, tout mot $g = y_{q_{l_1}} y_{q_{l_2}} \cdots y_{q_{l_n}} g_{m_2} \cdots g_{m_t}$ où l_1 , l_2 , ... , l_n est une permutation quelconque de $[1 , n]$, est encore un élément de $\rho^{-1} f \cap \mathcal{S}^*$ d'après la proposition 4.1.

Donc, en particulier, tous les y_{q_1} , y_{q_2} , ... , y_{q_n} apparaissent comme première lettre d'une représentation en cycles $g \in \rho^{-1} f \cap \mathcal{S}^*$.

Ou encore y_{q_1} , y_{q_2} , ... , $y_{q_n} \in \mathcal{R} f$.

Ainsi, l'ensemble de tous les premiers élément g_{m_1} des suites $(g_{m_1} , g_{m_2} , \cdots g_{m_t})$ de Rf n'est autre que l'ensemble $R'f$ des mots décroissants g du sous-monoïde libre engendré par $\mathcal{R} f$.

Nous avons alors

$$\sum_{(g_{m_1} , g_{m_2} , \cdots g_{m_t}) \in Rf} \eta g_{m_1} . \eta g_{m_2} . \cdots . \eta g_{m_t} = \sum_{g_o \in R'f} \eta g_o \sum_{(g_{m_2} , \cdots , g_m) \in R\{f/g_o\}} \eta g_{m_2} . \cdots . \eta g_{m_t}$$

Or, pour g_o fixé $\in R' f$, $R\{f/g_o\} = Rf'$ où $\lambda C f' < \lambda C f = s$, d'après ce qui a été montré plus haut.

Ainsi, par récurrence sur s , on a

$$\sum_{(g_{m_1} , g_{m_2} , \cdots , g_{m_t}) \in Rf} \eta g_{m_1} . \eta g_{m_2} . \cdots . \eta g_{m_t} = \sum_{g_o \in R'f} \eta g_o = \sum_{g_o \in R'f} (-1)^{\lambda g_o + 1} = \sum_{n=1}^{p} (-1)^{n+1} \quad R'_n$$

où R'_n est le nombre de mots de $R'f$ de longueur égale à n.

Or, pour tout sous-ensemble $\{y_{q_1} , y_{q_2} , \ldots , y_{q_n}\}$ de mots de $\mathcal{R} f$, il n'y a qu'un et qu'un seul mot décroissant.

$$g = y_{q_{l_1}} y_{q_{l_2}} \cdots y_{q_{l_n}}$$

ayant même image abélienne que

$$y_{q_1} y_{q_2} \cdots y_{q_n} \quad (1 \leqslant n \leqslant p) .$$

Ainsi R'_n est égal au nombre de combinaisons de n éléments qu'on peut extraire de l'ensemble $\{y_1 , y_2 , \ldots , y_p\}$ soit $\binom{p}{n}$.

D'où

$$\sum_{n=1}^{p} (-1)^{n+1} R_n = - \sum_{n=1}^{p} (-1)^n \binom{p}{n} = - (1 - 1)^n + (-1)^0 \binom{p}{0} = 1$$

ce qui complète la preuve de la proposition 4.5.

Enfin, les propositions 4.3 et 4.5 complètent définitivement la démonstration du théorème 3.1.

5. Les factorisations de monoïdes libres

5.1. Introduction.

Nous rappelons dans ce chapitre le théorème de factorisation de Schützenberger et en donnons quelques applications.

Nous mentionnons aussi la factorisation en mots lexicographiques standards (introduite par Lyndon [25] puis Chen, Fox et Lyndon [8] et Širšov [37]) et en déduisons une factorisation (proposition 5.2) que nous utiliserons au chapitre suivant.

5.2. Le théorème de factorisation de Schützenberger.

Soit toujours $\mathcal{X}^*$ le monoïde libre engendré par un ensemble $\mathcal{X}$.

Nous avons donné au paragraphe 2.1 la notion de mots conjugués de $\mathcal{X}^*$. Si $\mathcal{X}'$ est un sous-monoïde de $\mathcal{X}^*$ nous dirons encore que les mots ff' et $f'f$ de $\mathcal{X}^*$ sont $\mathcal{X}'$ - *conjugués* si f et f' appartiennent tous deux à $\mathcal{X}'$.

Soit maintenant $\{Y_j : j \in J\}$ une famille de sous-ensembles de $\mathcal{X}^{*+}$ où J est un ensemble totalement ordonné. Pour une telle famille, Schützenberger [34] considère les conditions (I), (I') et (II) suivantes.

(I) (resp. (I')) Chaque $f \in \mathcal{X}^{*+}$ a au plus (resp. au moins) une factorisation de la forme $f = f_1 f_2 \ldots f_s$ $(s > 0)$ où chaque $f_k \in Y_{j_k}$ et $j_1 \geqslant j_2 \geqslant \ldots \geqslant j_s$ (pour l'ordre total dans J).

(II) Chaque classe C de mots conjugués a une intersection non vide avec le sous-monoïde Y_j^* engendré par Y_j pour un et un seul $j \in J$; de plus $C \cap Y_j^*$ est une classe de mots Y_j^* - conjugués. Il montre alors le théorème suivant.

THEOREME 5.1. (Schützenberger [34]). - *Deux quelconques des conditions* (I), (I') *et* (II) *entraînent la troisième.*

Son résultat lui permet en outre de donner dans l'algèbre large $\mathbf{R}[[\mathfrak{X}^*]]$ une expression pour $\log(1-\mathbf{X})^{-1}$ où $\mathbf{X}$ est la série formelle $\Sigma\{f : f \in \mathfrak{X}^*\}$; à savoir

$$\operatorname{Log}(1-\mathbf{X})^{-1} = \Sigma \left\{ \frac{1}{\mathbf{card}\ C}\ \Sigma\{\log(1-f)^{-1} : f \in C\} : \text{toutes les classes } C \text{ d'éléments primitifs} \right\}.$$

Dans le même article, il montre qu'on peut construire pour un ensemble $\mathfrak{X}$ non vide une infinité de familles $\{Y_j : j \in J\}$ satisfaisant les conditions (I) et (I').

Nous y reviendrons au début du chapitre 7.

Dans le prochain paragraphe, nous donnons simplement quelques conséquences de ce résultat.

5.3. Quelques applications et définitions.

Nous dirons que la donnée de la famille $\{Y_j : j \in J\}$ de sous-ensembles de $\mathfrak{X}^{*+}$ (J totalement ordonné) est une *factorisation de Schützenberger* (factorisation (S)) si les deux consitions (I) et (I') sont remplies. La notion de factorisation (S) est donc la transposition au cas des monoïdes libres de la notion de factorisation des groupes (Cf. par exemple Szép [40]). Si un mot f de $\mathfrak{X}^*$ est de longueur 1, il est forcément contenu dans un et un seul Y_j ($j \in J$). Réciproquement, nous dirons que la factorisation (S) est de *type a*, si chaque Y_j contient au plus un mot de $\mathfrak{X}^*$ de longueur 1. Nous dirons aussi qu'une factorisation (S) est de *type b*, si chaque ensemble Y_j ne contient qu'un seul élément de $\mathfrak{X}^*$. La donnée d'une telle factorisation est alors équivalente à la donnée d'un sous-ensemble $\mathcal{H}$ de mots de $\mathfrak{X}^{*+}$ et d'un ordre total sur $\mathcal{H}$ que l'on notera $\trianglerighteq$, tels que chaque élément $f \in \mathfrak{X}^{*+}$ a une et une seule factorisation de la forme $f_1 f_2 \dots f_s$ ($s > 0$) où

$$(S') \qquad \begin{aligned} &f_1, f_2, \dots, f_s \in \mathcal{H} && (1)\\ &f_1 \trianglerighteq f_2 \trianglerighteq \dots \trianglerighteq f_s && (2) \end{aligned}$$

Nous pouvons tout de suite donner une application du théorème 5.1 sous la forme d'un

COROLLAIRE 5.1. - *Pour une factorisation de type* b, *toute classe de mots conjugués, contient une puissance d'un et d'un seul mot de* $\mathcal{H}$, *et tous les éléments de* $\mathcal{H}$ *sont primitifs.*

PREUVE. - En effet, le sous-monoïde Y_j^* engendré par Y_j est à un seul générateur et la première propriété découle immédiatement de la condition (II). Pour la deuxième propriété, observons que si l'on a $f \in \mathcal{H}$ et $f = f'^p$ (p entier > 0 maximal), alors soit f'' le mot (primitif) conjugué à f' qui soit élément de $\mathcal{H}$. Alors les mots f''^p et f'^p sont conjugués ; soit C leur classe. Nous avons alors $C \cap \{f\}^* \neq \emptyset$ et $C \cap \{f''\}^* \neq \emptyset$. Mais d'après la conditions (II) cela ne peut arriver que si $f = f''$; donc f est primitif.

CONSEQUENCE 5.1. - *Pour une factorisation de type* b, *toute classe primitive contient un et un seul mot de* $\mathcal{H}$.

Cette remarque est suffisante pour démontrer la formule dite de Witt pour toutes les factorisations de type b. Cette formule a été démontrée par plusieurs auteurs et sa démonstration combinatoire s'appuie sur un résultat combinatoire dû au Colonel Moreau (cité dans Lucas [24]).

LEMME 5.1. (Lucas [24] p. 501-503). - *Le nombre de classes conjuguées de mots primitifs de longueur* n *dans un monoïde libre engendré par un ensemble de* q *éléments est donné par* $(1/n) \sum_{d \mid n} \mu(n/d)\, q^d$ *où* μ *désigne la fonction de Möbius (définie sur* $\mathbf{N}$ *et telle que pour* $a \in \mathbf{N}$, $\mu(a) = 0$ *(resp.* $(-1)^k$*) si* a *est divisible (resp. n'est pas divisible) par un carré* $\neq 1$, k *désignant le nombre de diviseurs premiers de* a).

Supposons donc donnée une factorisation (S) de type b, c'est-à-dire un sous-ensemble $\mathcal{H}$ de mots (primitifs) de $\mathcal{X}^*$ et un ordre total $\leq$ sur $\mathcal{H}$, tel que chaque mot $f \in \mathcal{X}^{*+}$ a une et une seule factorisation $f_1 f_2 \ldots f_s$ $(s > 0)$ ayant les propriétés (1) et (2) de (S').

Si Q est un sous-ensemble de $\mathcal{X}$ de q éléments $\{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$ $(q > 0)$ et n un entier positif, nous désignons par Q_n l'ensemble des mots du sous-monoïde Q^* de $\mathcal{X}^*$ engendré par Q, de longueur n. Nous désignons aussi par $Q(n_1, n_2, \ldots, n_q)$ l'ensemble des mots f de Q^* tels que

$$(\alpha f)(x_1) = n_1, \ldots, (\alpha f)(x_q) = n_q,$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_q$ sont q entiers positifs tels que

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n .$$

Nous avons alors

PROPOSITION 5.1. -

$$\textbf{card}\,(Q_n \cap \mathcal{H}) = 1/n \sum_{d \mid n} \mu(n/d)\, q^d \tag{5.3.1}$$

$$\textbf{card}\,(Q(n_1, n_2, \ldots, n_q) \cap \mathcal{H}) = 1/n \sum_{d \mid n_1, \ldots, n_q} \mu(d) \left(\frac{n}{d}\right)! \Big/ \left(\frac{n_1}{d}\right)! \ldots \left(\frac{n_q}{d}\right)! \tag{5.3.2}$$

où μ *désigne la fonction de Möbius.*

PREUVE. - (5.3.1) se déduit immédiatement du lemme de Moreau et de la conséquence 5.1. Pour la seconde formule, nous observons que la classe abélienne $Q(n_1, n_2, \ldots, n_q)$ contient $\dfrac{n!}{n_1! \ldots n_q!}$ éléments. D'où la formule

$$\frac{n!}{n_1! \ldots n_q!} = \sum_{d \mid n_1, n_2, \ldots n_q} d\ \textbf{card}\ Q\left(\frac{n_1}{d}, \frac{n_2}{d}, \ldots, \frac{n_q}{d}\right)$$

et la formule (5.3.2) en appliquant la formule d'inversion de Möbius.

Notons que ces formules ont aussi été données par Širšov [37], Chen, Fox et Lyndon [8] et Hall [19] pour chacune de leurs factorisations.

Donnons maintenant quelques indications sur *la factorisation en mots lexicographiques standards*, factorisation qu'on utilisera dans le chapitre suivant pour donner une première démonstration d'un théorème combinatoire.

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble totalement ordonné et soit $\preceq$ l'ordre lexicographique sur $\mathcal{X}^*$ induit par l'ordre de $\mathcal{X}$. Soit $\mathcal{H}$ le sous-ensemble de $\mathcal{X}^{*+}$ défini par la condition (5.3.3)

$$f \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow (f = f'f'' \ ;\ f', f'' \in \mathcal{X}^{*+} \Longrightarrow f \prec f'') \tag{5.3.3}$$

Alors

THEOREME 5.2. (Sirsov [37], Lyndon [25]). - *Tout mot* $f \in \mathfrak{X}^{*+}$ *a une et une seule factorisation* $f = f_1 f_2 \dots f_s$ *où tous les éléments* f_k *appartiennent à* $\mathcal{H}$ *et satisfont* $f_1 \geqq f_2 \geqq \dots \geqq f_s$.

Nous ne donnons pas ici la démonstration, car cette factorisation sera de nouveau explicitée au chapitre 7 et donnée comme un exemple d'une famille plus générale de factorisations. La définition (5.3.3) est aussi (Cf. [8]) équivalente à la définition

$$f \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow f \text{ est minimum dans sa classe de conjugués.} \quad (5.3.4)$$

$\mathcal{H}$ est encore désigné comme l'ensemble des mots *standards* de $\mathfrak{X}^*$.

En vue de démontrer le résultat combinatoire du chapitre suivant, nous donnons maintenant une nouvelle factorisation (S) déduite de celle-ci :

La première lettre $\mathbf{P}f$ d'un mot standard $f \in \mathcal{H}$ est forcément une lettre minimale du mot, d'après la définition (5.3.3) et les propriétés de l'ordre lexicographique. Désignons par $\mathcal{K}_o$ l'ensemble des mots standards f de $\mathcal{H}$ tels que $(\alpha f)\,(\mathbf{P}f) = 1$ (les mots minimum dans leurs classes de conjugués et dont la première lettre est aussi minimum parmi les autres lettres du mot). Alors tout mot standard f a une factorisation unique $f = f_1 f_2 \dots f_m$ où $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathcal{K}_o$ et où $\mathbf{P}f_1 = \mathbf{P}f_2 = \dots = \mathbf{P}f_m$.

Ou encore, si $f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} \in \mathcal{H}$, soit

$$\Lambda_1 (= 1), \quad \Lambda_2, \dots, \Lambda_m \quad (\leqslant r)$$

la suite croissante des indices tels que

$$\mathbf{P}f = x_{i_{\Lambda_1}} = x_{i_{\Lambda_2}} = \dots = x_{i_{\Lambda_m}}$$

et $x_{i_l} > Pf$ si

$$l \neq \Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m$$

alors le mot

$$x_{i_{\Lambda_t}} x_{i_{\Lambda_t+1}} \dots x_{i_{\Lambda_{t+1}-1}} \quad (\Lambda_{m+1} = r+1)$$

a seulement sa première lettre égale à $\mathbf{P}f$, et comme celle-ci est minimale parmi les lettres de f, il appartient à $\mathcal{K}_0$.

Il résulte alors du théorème 5.2.

PROPOSITION 5.2. - *Tout mot* $f \in \mathcal{X}^{*+}$ *a une et une seule factorisation* $f_1 = f_1 f_2 \ldots f_s$ *où* $f_1, f_2, \ldots, f_s \in \mathcal{K}_0$ *et où*

$$\mathbf{P}f_1 \geqslant \mathbf{P}f_2 \geqslant \ldots \geqslant \mathbf{P}f_s .$$

Dans la terminologie du théorème 5.1, J est identique à l'ensemble totalement ordonné $\mathcal{X}$ et Y_j est le sous-ensemble des mots f de $\mathcal{K}_0$ tels que $\mathbf{P}f = j$ $(\in J)$.

6. Une application de la représentation en cycles du monoïde libre

6.1. Introduction.

Nous donnons dans ce chapitre la démonstration d'un théorème combinatoire non commutatif (théorème 6.1 ci-dessous). Une autre démonstration en sera donnée au chapitre 8 lorsque nous aurons introduit la notion de factorisation spéciale d'un monoïde libre. Ce résultat aura une interprétation naturelle en termes de calcul des probabilités qui sera donnée au chapitre 9.

Avant de démontrer ce résultat combinatoire, nous donnerons la définition d'un opérateur δ' (paragraphe 6.2) qui nous permettra de construire pour tout mot f d'un monoïde libre $\mathfrak{X}^*$ une et une seule représentation en cycles de f ayant la propriété d'appartenir à $\mathcal{K}_1$ (ensemble défini ci-dessous par (6.2.8) et (6.2.9)). Nous en déduirons alors la construction d'une permutation Φ de $\mathfrak{X}^*$ qui va complètement expliciter le résultat combinatoire du théorème 6.1'.

La construction que nous allons donner s'appuie sur les résultats du chapitre 4 et il nous semble bon de rappeler ici ceux que nous utiliserons, ainsi que quelques notations.

$\mathfrak{X}^*$ est le monoïde libre engendré par un ensemble totalement ordonné $\mathfrak{X}$; $\theta : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}^*$ une bijection et $\rho : \mathcal{Y}^* \longrightarrow \mathfrak{X}^*$ une surjection ayant les propriétés suivantes (Cf. proposition 4.2) :

si $g = y_{l_1} y_{l_2} \ldots y_{l_s} \in \mathcal{Y}^*$ et si l'on pose :

$$\theta y_{l_p} = x_{v_{K_{p-1}+1}} x_{v_{K_{p-1}+2}} \ldots x_{v_{K_p}} \quad (K_o = 0 \; ; \; 1 \leqslant p \leqslant s),$$

ρ fait correspondre au mot g un mot $\rho g = f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ de $\mathfrak{X}^*$ tel qu'en posant $\beta f = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r}$, il correspond à tout $k \in [1 , r]$ un et un seul $k' \in [1 , r]$ tel que

$$(x_{j_k}, \gamma_k \beta f) = (x_{\nu_{k'}}, \gamma_{k'} \theta g) \qquad (6.1.1)$$

et

$$x_{i_k} = x_{\nu_{k'-1}} \quad \text{si} \quad k' \neq K_{p-1}+1 \quad \text{pour tout} \quad p \in [1, s] \qquad (6.1.2)$$
$$= x_{\nu_{K_p}} \quad \text{si} \quad k' = K_{p-1}+1.$$

En particulier, on a

$$\alpha\theta g = \alpha f .$$

(Nous rappelons que le nombre $\gamma_k f$ où $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \in \mathfrak{X}^{*+}$ est défini pour $1 \leqslant k \leqslant r$ et n'est autre que le nombre de lettres égales à x_{i_k} dans le facteur initial $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$ de f).

De plus, $\mathfrak{S}_0$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{M}$ (l'ensemble des mots multilinéaires de $\mathfrak{X}^*$) ayant la propriété d'avoir une intersection non vide avec toute classe de mots conjugués de $\mathfrak{M}$. Ensuite $\mathfrak{S} = \theta^{-1}\mathfrak{S}_0$.

Nous prendrons sur $\mathfrak{X}^*$ l'ordre lexicographique induit soit par l'ordre de $\mathfrak{X}$, soit par l'ordre inverse de $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{S}_0$ désignera l'ensemble des mots multilinéaires minimum dans leurs classes de conjugués pour l'ordre choisi.

D'autre part, dans toute classe $\rho^{-1}f$, on distingue (définition 4.1) un et seul élément, dit *canonique*, noté Cf, tel que si (6.1.3)

$$Cf = y_{l_1} y_{l_2} \cdots y_{l_s}$$

alors

$$y_{l_1}, y_{l_2}, \ldots, y_{l_s} \in \mathfrak{S} \quad \text{et} \quad s = 1 \quad \text{ou} \quad s > 1$$

et

$$y_{l_1} = \max\{\mathbf{P}g : g \in \rho^{-1} f \cap \mathfrak{S}^*\}$$
$$y_{l_2} = \max\{\mathbf{P}g : g \in \rho^{-1}\rho\, y_{l_2} \ldots y_{l_s} \cap \mathfrak{S}^*\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{l_{s-1}} = \max\{\mathbf{P}g : g \in \rho^{-1}\rho\, y_{l_{s-1}} y_{l_s} \cap \mathfrak{S}^*\}$$

(les "max" ci-dessus se rapportent à l'ordre induit sur $\mathfrak{S}$ par

l'ordre choisi sur $\mathfrak{X}^*$ et $\mathfrak{S}^*$ désigne le monoïde engendré par l'ensemble $\mathfrak{S}$).

L'ensemble des mots canoniques munis de l'opération o (g, g' canoniques, $g \circ g' = C\rho(gg')$) est un monoïde libre noté $\mathfrak{C}$. (6.1.4)

Enfin, nous désignons par $\mathfrak{K}_0$ l'ensemble des mots $f \in \mathfrak{X}^*$ minimum (par rapport à l'ordre choisi dans $\mathfrak{X}^*$) dans leurs classes de conjugués et tels que $(\alpha f)(\mathbf{P} f) = 1$.

Nous posons aussi $\mathfrak{K} = \theta^{-1}\mathfrak{K}_0$. En particulier $\mathfrak{S}_0 \subset \mathfrak{K}_0$.

6.2. L'opérateur δ'.

L'opérateur δ' que nous définissons maintenant peut être interprété comme l'inverse de l'opérateur δ introduit au paragraphe 4.3.

Plus précisément soit $\mathfrak{X}^*$ le monoïde libre engendré par un ensemble totalement ordonné $\mathfrak{X}$, $\theta : \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}^*$ une bijection. Alors pour un élément (y', y'') du produit cartésien $\mathfrak{Y} \times \theta^{-1}\mathfrak{M}$, tel que $\theta y'$ et $\theta y''$ sont non disjoints, nous posons

$$\delta'(y', y'') = y \tag{6.2.1}$$

si et seulement si

(i) $y' = \underline{\delta} y$ (6.2.2)

(ii) $\theta y''$ et $\theta \overline{\delta} y$ sont conjugués.

δ' est donc une application de $\mathfrak{Y} \times \theta^{-1}\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{Y}^*$. Les opérateurs $\underline{\delta}$ et $\overline{\delta}$ ont été définis au paragraphe 4.3, mais nous allons expliciter cette définition.

Si

$$\theta y' = x_{v_1} x_{v_2} \dots x_{v_{r'}},$$

et

$$\theta y'' = x_{w_1} x_{w_2} \dots x_{w_{r''}},$$

soit k' le plus grand entier $(1 \leqslant k' \leqslant r')$ tel que

$$(\alpha \theta y'')(x_{v_{k'}}) > 0 \quad (= 1 \text{ puisque } \theta y'' \in \mathfrak{M})$$

et k'' l'indice tel que $x_{w_{k''}} = x_{v_{k'}}$ $(1 \leqslant k'' \leqslant r'')$.

Posons

$$f_1 = x_{v_1} \dots x_{v_{k'}}$$

$$f_2 = \tau^{''k''}\theta y'' = x_{w_{k''+1}} \dots x_{w_{r''}}\ x_{w_1} \dots x_{w_{k''}}$$

si $k'' > 1$ et égal à $\theta y''$ si $k'' = 1$

$$f_3 = x_{v_{k'+1}} \dots x_{v_{r'}} \qquad \text{si} \quad k' < r'$$

$$= 1 \quad \text{si} \quad k' = r' .$$

Alors $\delta'(y', y'') = y = \theta^{-1}(f_1\ f_2\ f_3)$. Illustrons cette définition par un exemple.

Exemple. - Soit dans le monoïde libre $\mathfrak{X}^*$ engendré par les entiers les mots $f' = 2\ 3\ 4\ 2\ 1$ et $f'' = 6\ 4\ 3$.

Désignons par $[x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}]$ l'élément $\theta^{-1} f$ de $\mathcal{Y}$ où $f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} \in \mathfrak{X}^*$ et posons $y' = [2\ 3\ 4\ 2\ 1]$ et $y'' = [6\ 4\ 3]$.

Avec les notations précédentes nous avons

$$f_1 = 2\ 3\ 4$$

$$f_2 = \tau^{''2} f'' = 3\ 6\ 4$$

$$f_3 = 2\ 1$$

D'où

$$\delta'(y', y'') = [f_1\ f_2\ f_3] = [2\ 3\ 4\ 3\ 6\ 4\ 2\ 1] .$$

Examinons maintenant quelques conséquences immédiates de cette définition.

Tout d'abord, les mots $\theta\delta'(y', y'')$ et $\theta y'$ ont même première lettre (x_{v_1} dans nos notations précédentes) d'où

$$\mathbf{P}\theta\delta'(y', y'') = \mathbf{P}\theta y'. \tag{6.2.3}$$

D'autre part, d'après le lemme 4.4, on a

$$ey = e\delta y \quad \text{pour tout} \quad y \in \mathcal{Y} \tag{6.2.4}$$

soit encore

$$e\delta'(y' , y'') = e(y'\ y'') \qquad (6.2.5)$$

puisque

$$e(y'\ y'') = e(\delta y.\ y'') \qquad \text{d'après (6.2.2)}$$

$$e(\underline{\delta} y.\ y'') = e(\underline{\delta} y.\overline{\delta} y) \qquad \text{d'après (6.2.2)}$$

et le lemme 4.2 puisque $\theta y''$ est multilinéaire.

Enfin,

$$e(\underline{\delta} y\ .\ \overline{\delta} y) = e\delta y = ey = e\ \delta'(y'\ y'')$$

d'après la définition de δ , (6.2.4) et (6.2.1).

Nous allons maintenant étendre la classe des opérateurs δ' et définir une famille d'opérateurs δ'_p de la manière suivante.

Pour $g = y_{l_1}\ y_{l_2} \ \ldots\ y_{l_s} \in \mathfrak{Y}^*$ nous posons

$$\delta'_p\ g = y_{l_1}\ y_{l_2} \ \ldots\ y_{l_{p-1}}\ \ \delta'(y_{l_p} , y_{l_{p+1}})\ y_{l_{p+2}} \ \ldots\ y_{l_s}$$

si les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} &(1)\quad 1 \leqslant p \leqslant s-1 \\ &(2)\quad \theta y_{l_{p+1}} \in \mathfrak{M} \qquad (6.2.6) \\ &(3)\quad \theta y_{l_p} \ \text{ et } \ \theta y_{l_{p+1}} \ \text{ non disjoints ;} \end{aligned}$$

et $\delta'_p\ g = g$ si au moins une de ces trois conditions n'est pas satisfaite.

Les δ'_p engendrent un monoïde d'opérateurs Δ' de $\mathfrak{Y}^*$ dans $\mathfrak{Y}^*$. Il résulte alors de (6.2.5) et de la définition de l'application e (lemme 4.1) que pour tout opérateur $\chi' \in \Delta'$

$$e\chi' g = eg \quad (e \in \mathfrak{Y}^*) . \qquad (6.2.7)$$

Puisque $\pi^{-1}e = \rho$ (voir début du § 4.5), nous obtenons

$$\rho\chi' g = \rho g \qquad (6.2.7')$$

en appliquant π^{-1} aux deux membres de (6.2.7).

Cette dernière relation peut, pour tout $\chi' \in \Delta'$ être vérifiée directement.

Désignons par $\mathcal{K}_1$ l'ensemble des mots $g = y_{m_1} y_{m_2} \dots y_{m_t}$ de $\mathcal{Y}^*$ tels que les conditions

$$y_{m_1}, y_{m_2}, \dots, y_{m_t} \in \mathcal{K} \tag{6.2.8}$$

$$\mathbf{P}\theta y_{m_1} \geqslant \mathbf{P}\theta y_{m_2} \geqslant \dots \geqslant \mathbf{P}\theta y_{m_t} \tag{6.2.9}$$

(pour l'ordre choisi sur $\mathcal{X}^*$)

soient satisfaites.

La proposition 5.2 entraîne qu'à tout $f \in \mathcal{X}^{*+}$ on peut faire correspondre de façon bijective une suite $(f_1, f_2, \dots, f_t)$ de mots de $\mathcal{K}_0$ tels que $\mathbf{P}f_1 \geqslant \mathbf{P}f_2 \geqslant \dots \geqslant \mathbf{P}f_t$ .et $f = f_1 f_2 \dots f_t$. Nous désignons alors par $\psi : \mathcal{X}^* \longrightarrow \mathcal{K}_1$ la bijection qui à f fait correspondre l'élément $\psi f = \theta^{-1} f_1 . \theta^{-1} f_2 \dots \theta^{-1} f_t$ de $\mathcal{K}_1$.

Il en résulte en particulier que

$$\mathbf{card}\ \mathcal{K}_1 \cap G(h) = \mathbf{card}\ \alpha^{-1} h \quad (h \in \bar{\mathcal{X}}^*) \tag{6.2.10}$$

(Nous rappelons que $G(h)$ désigne l'ensemble des mots $g \in \mathcal{Y}^*$ tels que $\theta g \in \alpha^{-1} h$).

Nous montrons alors la

PROPOSITION 6.1. - *Toute classe* $\rho^{-1} f$ $(f \in \mathcal{X}^*)$ *contient un et un seul élément de* $\mathcal{K}_1$ *ou encore*

A tout mot $g = y_{l_1} y_{l_2} \dots y_{l_t}$ *de* $\mathcal{C}$ *correspond biunivoquement un mot* $\chi g = y_{m_1} y_{m_2} \dots y_{m_t}$ $(t > 0)$ *de* $\mathcal{Y}^*$ *tel que*

$$y_{m_1}, y_{m_2}, \dots, y_{m_t} \in \mathcal{K}$$

$$\mathbf{P}\theta y_{m_1} \geqslant \mathbf{P}\theta y_{m_2} \geqslant \dots \geqslant \mathbf{P}\theta y_{m_t}$$

(*pour l'ordre choisi dans* $\mathcal{X}^*$) *et*

$$\rho\chi g = \rho g .$$

Ce mot χg *est identique à* g *si* $s = 1$, *et pour* $s > 1$ *peut être obtenu en appliquant à* g *l'opérateur*

$$\delta_t^{\,s-s_t} \ldots \delta_2^{\,s_3-s_2-1} \quad \delta_1^{\,s_2-s_1-1}$$

où $s_1 = 1$ *et* $s_2, \ldots, s_t$ $(\leqslant s)$ *est la suite croissante des entiers* s_k *tels que*

$$\mathbf{P}\,\theta\, y_{l_{s_k}} \leqslant \mathbf{P}\,\theta y_{l_p} \quad \textit{pour tout} \quad p < s_k .$$

PREUVE. - Dans toute la démonstration, quand on comparera deux lettres de $\mathfrak{X}$, il s'agira de l'ordre induit sur $\mathfrak{X}$ par l'ordre choisi sur $\mathfrak{X}^*$, donc de l'ordre initial de $\mathfrak{X}$ si on a pris l'ordre lexicographique ordinaire sur $\mathfrak{X}^*$ ou de l'ordre inverse de $\mathfrak{X}$ si on a choisi sur $\mathfrak{X}^*$ l'ordre lexicographique induit par l'ordre inverse de $\mathfrak{X}$.

Nous allons montrer que toute classe $\rho^{-1} f$ $(f \in \mathfrak{X}^*)$ contient un élément de $\mathcal{K}_1$, en construisant explicitement un tel élément. Il en résultera qu'il est unique d'après la relation (6.2.10), la relation

$$\mathbf{card}\ \mathfrak{C} \cap G(h) = \mathbf{card}\ \alpha^{-1} h \qquad (h \in \overline{\mathfrak{X}}^*)$$

(qui exprime que toute classe $\rho^{-1} f$ $(f \in \alpha^{-1} h)$ contient un et un seul élément canonique) et le fait que $\{\rho^{-1} f : f \in \mathfrak{X}^*\}$ est une partition de $\mathcal{Y}^*$.

Soit donc $g = y_{l_1} y_{l_2} \ldots y_{l_s}$ $(s > 0)$ un mot de $\mathfrak{C}$; posons $s_1 = 1$ et si $s > 1$, déterminons la suite de tous les indices $s_k > 1$ tels que

$$P\theta y_{l_{s_k}} \leqslant P\theta y_{l_p} \quad \text{pour tout} \quad p < s_k . \qquad (6.2.12)$$

Nous obtenons une suite $s_1 (= 1), s_2, \ldots, s_t$ $(\leqslant s)$ d'entiers tels que

$$P\theta y_{l_{s_1}} \geqslant P\theta y_{l_{s_2}} \geqslant \ldots \geqslant P\theta y_{l_{s_t}} . \qquad (6.2.13)$$

Par commodité, posons aussi $s_{t+1} = s+1$.

Si $s_{k+1} - s_k > 1$ pour $k \in [1, t]$, nous avons

$$P\theta y_{l_{s_k}} < x \qquad (6.2.14)$$

pour toute lettre x du mot θy_{l_p} $(s_k < p < s_{k+1})$ et pour toute lettre x du mot $\theta y_{l_{s_k}}$ à l'exclusion de la première. Cette relation est une conséquence immédiate de la définition des s_k et du

fait que les mots θy_{l_p} sont multilinéaires et minimum dans leurs classes de conjugués.

D'autre part, si $s_{k+1} - s_k > 1$, les mots

$$\theta y_{l_{s_k}} y_{l_{s_k+1}} \cdots y_{l_{p-1}} \quad \text{et} \quad \theta y_{l_p} \tag{6.2.15}$$

$(s_k < p < s_{k+1})$ sont *non disjoints*.

En effet, s'ils étaient disjoints, les mots

$$g_1 = y_{l_p} y_{l_{s_k}} y_{l_{s_k+1}} \cdots y_{l_{p-1}} y_{l_{p+1}} \cdots y_{l_s}$$

et

$$g_2 = y_{l_{s_k}} y_{l_{s_k+1}} \cdots y_{l_p} y_{l_{p+1}} \cdots y_{l_s}$$

vérifieraient $eg_1 = eg_2$ d'après la proposition 4.1 et l'on n'aurait pas

$$y_{l_{s_k}} = \max\{\mathbf{P}g' : g' \in \rho^{-1}\rho\, y_{l_{s_k}} y_{l_{s_k+1}} \cdots y_{l_s} \cap \mathfrak{S}^*\}$$

puisque, d'après les formules (4.5.6) ou (6.1.3), la relation $\mathbf{P}\theta y_{l_{s_k}} < \mathbf{P}\theta y_{l_p}$ entraîne en particulier

$$y_{l_{s_k}} < y_{l_p} \qquad \text{(pour l'ordre dans } \mathfrak{S}\text{)}.$$

Toujours dans l'hypothèse $s_{k+1} - s_k > 1$, nous pouvons appliquer l'opérateur δ' au couple $(y_{l_{s_k}}, y_{l_{s_k+1}})$.

D'après (6.2.3), nous avons

$$\mathbf{P}\theta\delta'(y_{l_{s_k}}, y_{l_{s_k+1}}) = \mathbf{P}\theta y_{l_{s_k}} \tag{6.2.16}$$

et il résulte alors de (6.2.14) que

$$\delta'(y_{l_{s_k}}, y_{l_{s_k+1}}) \in \mathcal{K}\,. \tag{6.2.17}$$

De même, lorsque $s_{k+1} - s_k > 2$, nous pouvons appliquer, d'après (6.2.15), l'opérateur δ' successivement aux couples

$$(y_{l_{s_k}}, y_{l_{s_k+1}}),\ (\delta'(y_{l_{s_k}}, y_{l_{s_k+1}}), y_{l_{s_k+2}}), \ldots,$$

$$(\delta'(\ldots\delta'(y_{l_{s_k}}, y_{l_{s_k+1}}), \ldots, y_{l_{s_{k+1}-2}}), y_{l_{s_{k+1}-1}}).$$

Nous obtenons, en posant $y_{m_k} = \delta'(\ldots\delta'(y_{l_{s_k}}, y_{l_{s_k+1}}), \ldots, y_{l_{s_{k+1}-1}})$,

$$\mathbf{P}\theta y_{m_k} = \mathbf{P}\theta y_{l_{s_k}} \tag{6.2.18}$$

d'après la propriété (6.2.3). Il résulte ensuite de la propriété (6.2.14) que $\mathbf{P}\,\theta\, y_{l_{s_k}}$, première lettre du mot θy_{m_k} est aussi la plus petite et n'est pas répétée dans le mot. D'où

$$y_{m_k} \in \mathcal{K}\,. \tag{6.2.18}$$

De là, si à $g = y_{l_1}\, y_{l_2} \ldots y_{l_s}$, nous appliquons l'opérateur

$$\chi' = \delta_t^{\,\prime\, s_{t+1}-s_t-1} \ldots \delta_1^{\,\prime\, s_3-s_2-1}\quad \delta^{\prime\, s_2-s_1-1}\,,$$

nous obtenons le mot $y_{m_1}\ y_{m_2} \ldots y_{m_t}$.

Il résulte de (6.2.19) que $y_{m_1}, y_{m_2}, \ldots, y_{m_t} \in \mathcal{K}$, de (6.2.18) et (6.2.13) que $P\theta\, y_{m_1} \geqslant P\theta\, y_{m_2} \geqslant \ldots \geqslant P\theta\, y_{m_t}$ et de la propriété (6.2.7') que $\rho\chi' g = \rho g$.

Dans la suite nous désignons, pour tout mot canonique $g \in \mathcal{C}$, par χg le mot (unique) de $\mathcal{K}_1$ tel que $\rho\chi g = \rho g$. Rappelons aussi que C est la bijection qui à $f \in \mathcal{X}^*$ associe le mot canonique de la classe $\rho^{-1} f$. Nous avons ainsi le diagramme :

$$\underset{\mathcal{X}}{f} \xrightarrow{C} \underset{\mathcal{C}}{Cf} \xrightarrow{\chi} \underset{\mathcal{K}_1}{\chi Cf} \xrightarrow{\psi^{-1}} \underset{\mathcal{X}^*}{\psi^{-1}\,\chi Cf} \tag{6.2.20}$$

et l'application $\Phi = \psi^{-1}\chi C$ est une permutation de $\mathcal{X}^*$ telle que

$$\alpha\Phi f = \alpha f\,. \tag{6.2.21}$$

Nous avons aussi $\rho\chi Cf = f$ puisque par définition de χ, χCf est l'unique mot de $\mathcal{K}_1$ dans la classe $\rho^{-1} f$.

Nous allons examiner quelques conséquences de ce résultat.

La définition de C, χ et ψ, donc de Φ dépend de l'ordre sur $\mathcal{X}^*$ choisi. Nous poserons

$$\Phi = \Phi_1$$

si dans la définition de C, χ et ψ on a pris l'ordre lexicographique ordinaire et

$$\Phi = \Phi_2$$

si l'ordre lexicographique induit par l'ordre inverse de $\mathcal{X}$ a été retenu sur $\mathcal{X}^*$.

6.3. Un théorème combinatoire non commutatif.

La proposition 6.1 nous permet de donner une première démonstration du théorème combinatoire suivant.

THEOREME 6.1. - *Soit* $x = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r})$ *une suite de* $(r > 1)$ *éléments d'un ensemble totalement ordonné* $\mathfrak{X}$, $(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r})$ *la suite déduite de* x *en réarrangeant les* x_{i_k} *en ordre non décroissant. Alors il est possible d'associer à* x, *de façon bijective, une troisième suite* $(x_{v_1}, x_{v_2}, \ldots, x_{v_r})$ *d'éléments de* $\mathfrak{X}$ *où*

$$(v_1, v_2, \ldots, v_r)$$

est une permutation de $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$, *telle qu'à tout* $k \in [1, r]$ *pour lequel* $x_{i_k} < x_{j_k}$ *correspond biunivoquement un* k' *tel que* $x_{v_{k'}} = x_{j_k}$ *et* $x_{v_{k'-1}} = x_{i_k}$. *Il est aussi possible d'associer à* x, *toujours de façon bijective, une autre suite* $(x_{w_1}, x_{w_2}, \ldots, x_{w_r})$ *d'éléments de* $\mathfrak{X}$ *où encore* $(w_1, w_2, \ldots, w_r)$ *est une permutation de* $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ *telle qu'à tout* $k \in [1, r]$ *pour lequel* $x_{i_k} > x_{j_k}$ *correspond un indice* k'' *tel que* $x_{w_{k''}} = x_{j_k}$ *et* $x_{w_{k''-1}} = x_{i_k}$.

Ce théorème se déduira immédiatement du théorème 6.1' que nous donnerons ci-après.

Rappelons tout de suite le résultat de Mac Mahon ([27] P.186) qui va apparaître comme une simple conséquence du théorème précédent. Mais introduisons d'abord quelques notations.

Soit $x = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r})$ une suite de r éléments $(r > 1)$ de $\mathfrak{X}$ (totalement ordonné) et $(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r})$ la suite déduite de x en réarrangeant les x_{i_k} en ordre non décroissant. Associons à x les nombres entiers νx et ξx définis par

$$\begin{aligned} \nu x &= \text{nombre d'indices } k \text{ tels que } x_{i_k} > x_{j_k} \\ \xi x &= \text{nombre d'indices } k \text{ tels que } x_{i_k} > x_{i_{k+1}} \end{aligned} \qquad (6.3.1)$$

$(1 \leqslant k \leqslant r-1)$. Nous avons alors

COROLLAIRE 6.1. (Mac Mahon). - *Etant donné une suite croissante* $(x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_d})$ $(d > 0)$ *d'éléments de* $\mathfrak{X}$ *(totalement ordonné) et* $n_1, n_2, \ldots, n_d$ d *entiers positifs, nous désignons par* h *l'ensemble de toutes les suites ordonnées contenant exactement* n_1 *fois l'élément* $x_{u_1}, \ldots, n_d$ *fois l'élément* x_{u_d} *et par* $(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r})$ *la suite*

$$(\underbrace{x_{u_1}, \ldots, x_{u_1}}_{n_1 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{x_{u_d}, \ldots, x_{u_d}}_{n_d \text{ fois}})$$

où $r = n_1 + n_2 + \ldots + n_d$.

Alors, pour tout entier $m \geq 0$, *il y a dans* h *autant de suites* x *telles que* $\xi x = m$ *que de suites* x *telles que* $\nu x = m$.

C'est une conséquence du théorème 6.1 puisque si

$$x = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r})$$

est une suite de h , on peut trouver dans h de façon bijective une suite $\Phi' x = (x_{w_1}, x_{w_2}, \ldots, x_{w_r})$ telle qu'à tout $k \in [1 , r]$ pour lequel $x_{i_k} > x_{j_k}$, correspond biunivoquement un indice k'' tel que

$$x_{w_{k''}} = x_{j_k} \quad \text{et} \quad w_{k''-1} = x_{i_k} , \quad \text{donc} \quad x_{w_{k''-1}} > x_{w_{k''}} .$$

D'où $\nu x = \xi \Phi' x$, par définition des fonctions ν et ξ .

Mac Mahon obtenait ce résultat par des manipulations algébriques sur les fonctions génératrices, d'où l'on ne peut déduire de procédé constructif permettant d'expliciter le résultat.

Nous donnons maintenant le résultat du théorème 6.1'. Dans le chapitre 8, nous construirons une autre permutation φ de $\mathfrak{X}^*$ ayant les mêmes propriétés que Φ_1 et Φ_2 définis à la fin du paragraphe 6.2.

Nous définissons sur $\mathfrak{X}^*$ deux familles de fonctions à valeurs entières $(\nu_{x,x'})$ et $(\xi_{x,x'})_{((x,x') \in \mathfrak{X}^2)}$ en posant pour $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ et $\beta f = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r}$,

$\nu_{x,x'} f$ = nombre d'indices k tels que $x_{i_k} = x$ et $x_{j_k} = x'$ $(1 \leq k \leq r)$

$\xi_{x,x'} f = 0$ si $\lambda f = 1$

= nombre d'indices k tels que $x_{i_k} = x$ et

$x_{i_{k+1}} = x'$ $(1 \leq k \leq r-1)$ si $\lambda f > 1$.

On posera aussi $\nu_{x,x'} f = \xi_{x,x'} f = 0$ si $f = 1$ (mot unité).

THEOREME 6.1'. - *Les permutations* Φ_1 *et* Φ_2 *de* $\mathfrak{X}^*$ *vérifient*

$$\alpha\Phi f = \alpha f \quad (f \in \mathfrak{X}^* ; \Phi = \Phi_1 \text{ ou } \Phi_2) ; \tag{6.3.2}$$

et l'on a pour tout $f \in \mathfrak{X}^*$

$$\nu_{x,x'} f = \xi_{x,x'} \Phi_1 f \tag{6.3.3}$$

pour tout couple $(x , x') \in \mathfrak{X}^2$ *tel que* $x < x'$,

et

$$\nu_{x,x'} f = \xi_{x,x'} \Phi_2 f \tag{6.3.4}$$

pour tout couple $(x , x') \in \mathfrak{X}^2$ *tel que* $x > x'$.

PREUVE. - Prenons sur $\mathfrak{X}^*$ l'ordre lexicographique induit par l'ordre de $\mathfrak{X}$ ou l'ordre inverse de $\mathfrak{X}$.

Soit $f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$ un mot de $\mathfrak{X}^{*+}$.

La bijection χC fait correspondre à f un mot unique $\chi C f = y_{l_1} y_{l_2} \dots y_{l_s} \in \mathcal{K}_1$, d'après la proposition 6.1.

Posons

$$\theta y_{l_p} = x_{v_{K_{p-1}+1}} x_{v_{K_{p-1}+2}} \dots x_{v_{K_p}} \quad (1 \leqslant p \leqslant s , K_o = 0) .$$

De là, $\psi^{-1} \chi C f = \Phi f = x_{v_1} x_{v_2} \dots x_{v_r}$, par définition de ψ.

Puisque $\rho \chi C f = f$, il résulte de (6.1.1) qu'à tout $k \in [1 , r]$ correspond biunivoquement un $k' \in [1 , r]$ tel que

$$(x_{j_k} , \gamma_k \beta f) = (x_{v_{k'}} , \gamma_{k'} \Phi f)$$

et

$$x_{i_k} = x_{v_{k'-1}} \qquad \text{si } k' \neq K_{p-1} + 1 \text{ pour tout } p \in [1 , s]$$

$$= x_{v_{K_p}} \qquad \text{si } k' = K_{p-1} + 1 .$$

Or, si $f'' \in \mathcal{K}_o$ et est de longueur > 1, sa dernière lettre est toujours plus grande que sa première (pour l'ordre choisi). Nous pouvons donc toujours écrire

$$x_{v_{K_{p-1}+1}} \leqslant x_{v_{K_p}} . \tag{6.3.5}$$

De même, si f'' et f''' sont deux mots de $\mathcal{K}$ tels que $\mathbf{P}f'' \geqslant \mathbf{P}f'''$ on a, a fortiori

$$\mathbf{L}f'' \geqslant \mathbf{P}f'' \geqslant \mathbf{P}f''' .$$

D'où, dans le cas présent, si $s > 1$

$$x_{v_{K_p+1}} \leqslant x_{v_{K_p}} . \qquad (6.3.6)$$

Si donc on ne s'intéresse qu'aux indices $k \in [1 , r]$ pour lesquels $x_{j_k} > x_{i_k}$, alors l'indice k' correspond à k est différent de $K_{p-1}+1$ pour tout $p \in [1 , s]$.

Et ainsi, à tout $k \in [1 , r]$ tel que $x_{j_k} > x_{i_k}$ correspond biunivoquement un indice k' tel que

$$x_{v_{k'}} = x_{j_k} \quad \text{et} \quad x_{v_{k'-1}} = x_{i_k} .$$

Si on a pris l'ordre lexicographique ordinaire sur $\mathfrak{X}^*$ alors $\Phi = \Phi_1$ et si pour un couple $(x , x') \in \mathfrak{X}^2$ tel que $x < x'$;

$$(k_1 , k_2 , \ldots , k_n)$$

sont tous les indices k pour lesquels $x_{i_k} = x < x' = x_{j_k}$, alors nous avons exactement n indices distincts k' $(k'_1 , k'_2 , \ldots , k'_n)$ pour lesquels $x_{v_{k'-1}} = x < x' = x_{v_{k'}}$, parmi les lettres du mot $\Phi_1 f = x_{v_1} x_{v_2} \ldots x_{v_r}$.

D'où

$$\nu_{x,x'} f = \xi_{x,x'} \Phi_1 f .$$

Si on a pris l'ordre lexicographique induit par l'ordre inverse de $\mathfrak{X}$, nous devons inverser les relations d'ordre (6.3.5) et (6.3.6) et à tout $k \in [1 , r]$ pour lequel $x_{i_k} > x_{j_k}$ correspond biunivoquement un indice k' tel que

$$x_{v_{k'-1}} = x_{i_k} > x_{j_k} = x_{v_{k'}} .$$

D'où encore

$$\nu_{x,x'} f = \xi_{x,x'} \Phi_2 f \qquad \text{pour tout couple}$$

$(x , x') \in \mathfrak{X}^2$ tel que $x > x'$.

Ce qui achève la démonstration du théorème 6.1'.

Le théorème 6.1 se déduit alors immédiatement si l'on associe à toute suite $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r})$ d'éléments de $\mathfrak{X}$ le mot $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \in \mathfrak{X}^*$.

Les suites $(x_{v_1}, x_{v_2}, \ldots, x_{v_r})$ et $(x_{w_1}, x_{w_2}, \ldots, x_{w_r})$ de l'énoncé sont les suites d'éléments de $\mathfrak{X}$ telles que

$$\Phi_1 f = x_{v_1} x_{v_2} \ldots x_{v_r} \quad \text{et} \quad \Phi_2 f = x_{w_1} x_{w_2} \ldots x_{w_r} .$$

7. Les factorisations spéciales

7.1. Introduction.

Une autre preuve du théorème combinatoire 6.1 sera donnée au chapitre 8 (théorème 8.1). A toute factorisation de Schützenberger nous associerons une certaine permutation φ de $\mathfrak{X}^*$ (le monoïde libre engendré par $\mathfrak{X}$ totalement ordonné). Il sera alors démontré que cette permutation φ a les mêmes propriétés que la permutation Φ_1 du théorème 6.1', c'est-à-dire

$$\alpha\varphi f = \alpha f \qquad (f \in \mathfrak{X}^*)$$

et

$$\nu_{x,x'} f = \xi_{x,x'} \varphi f \qquad (f \in \mathfrak{X}^*)$$

pour tout $(x, x') \in \mathfrak{X}^2$ tel que $x < x'$ quand et seulement quand la factorisation (S) considérée appartient à une certaine classe de factorisation (Sp) dites *spéciales*. Donnons-en tout de suite la définition.

Etant donnée une factorisation (S) d'un monoïde $\mathfrak{X}^*$ (Cf. § 5.3) engendré par un ensemble totalement ordonné $\mathfrak{X}$, c'est-à-dire une famille $\{Y_j : j \in J\}$ de sous-ensembles de $\mathfrak{X}^{*+}$ (J totalement ordonné) telle que chaque $f \in \mathfrak{X}^{*+}$ a une et une seule factorisation $f = f_1 f_2 \ldots f_s$ $(s > 0)$ ayant les propriétés

$$f_k \in Y_{j_k} \qquad \text{et} \qquad j_1 \geqslant j_2 \geqslant \ldots \geqslant j_s ,$$

nous dirons que *l'ordre de* J *est spécial* si les conditions

$$f \in Y_j , \quad f' \in Y_{j'} , \qquad \text{et} \qquad j \geqslant j' \qquad (7.1.1)$$

(pour l'ordre dans J) entraînent $\mathbf{L} f \geqslant \mathbf{P} f'$ (pour l'ordre dans $\mathfrak{X}$), et d'autre part que

La factorisation (S) est *spéciale* si l'ordre de J est spécial et si elle est de type b. (7.1.2)

D'après § 5.3, cette dernière condition (7.1.2) est alors équivalente à la donnée d'un sous-ensemble $\mathcal{H}$ de mots de $\mathcal{X}^{*+}$ et d'un ordre total $\trianglelefteq$ sur $\mathcal{H}$ tels que $f \in \mathcal{X}^{*+}$ a une et une seule factorisation $f = f_1 f_2 \ldots f_s$ $(s > 0)$ telle que

$$f_1, f_2, \ldots, f_s \in \mathcal{H}$$

$$f_1 \trianglerighteq f_2 \succ \ldots \trianglerighteq f_s$$

et $f, f' \in \mathcal{H}$, $f \trianglerighteq f'$ entraînent $\mathbf{L} f \geqslant \mathbf{P} f'$.

Nous donnons, dans ce chapitre, la construction de toute une classe de factorisations (Sp) par la méthode des crochets, utilisée aussi dans l'étude des algèbres de Lie libres (Voir dans [10] une construction analogue en théorie des codes).

De façon précise, soit $D = D(\mathcal{X})$ le système algébrique libre à une seule opération binaire sur $\mathcal{X}$. (Cf. [22] et [35]). Nous posons $D = D^+ \cup \mathcal{X}$ où D^+ est construit par induction comme l'ensemble des symboles $d = [d', d'']$ avec $d', d'' \in D$. D^* désigne en outre le monoïde libre engendré par D.

Si $g = d_1 d_2 \ldots d_i \ldots d_s \in D^*$ et $d_i = [d', d'']$, nous disons que le mot $g' = d_1 d_2 \ldots d_{i-1} d' d'' \ldots d_s$ est une *décomposition* de g et alors que toute décomposition de g' est aussi une décomposition de g. Tout $g \in D^*$ a alors une décomposition unique $\delta^* g \in \mathcal{X}^*$.

Pour obtenir une base de l'algèbre de Lie libre engendrée par $\mathcal{X}$, une méthode consiste (Meier-Wunderli [28], Hall [19], Schützenberger [35]) à associer à une application $\sigma : D \longrightarrow J$, où J est un ensemble totalement ordonné, un sous-ensemble $H_o \subset D^*$ et à déterminer des conditions suffisantes sur σ pour que $\delta^* : H_o \longrightarrow \mathcal{X}^*$ soit bijectif. La condition de Meier-Wunderli est une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi (nous le rappelons dans le théorème 7.1).

Dans le paragraphe 7.2, nous définissons pour tout σ un tel sous-ensemble $H_o \subset D^*$ et montrons d'abord que $\delta^* : H_o \longrightarrow \mathcal{X}^*$ est surjectif (proposition 7.1) ; ce qui entraîne l'existence d'une famille $\{Y_j : j \in J\}$ de sous-ensembles de $\mathcal{X}^{*+}$ satisfaisant à la condition (I') de Schützenberger. Lorsqu'en plus $\delta^* : H_o \longrightarrow \mathcal{X}^*$ est bijectif, alors cette famille $\{Y_j : j \in J\}$ détermine une factorisation (S) (proposition 7.2).

Nous donnons ensuite une nouvelle condition suffisante sur σ, dite condition (B), pour que $\delta^* : H_0 \longrightarrow \mathfrak{X}^*$ soit bijectif (proposition 7.3).

Une condition plus stricte avait déjà été introduite par Brunk [7] pour les seuls mots $d \in D$ tels que $\delta^* d$ est multilinéaire.

Nous montrons ensuite que si $\mathfrak{X}$ est totalement ordonné et si pour $x, x' \in \mathfrak{X}$

$$x < x' \Longleftrightarrow \sigma x < \sigma x'$$

(dans $\mathfrak{X}$) (dans J)

alors la condition (B) entraîne que l'ordre de J est *spécial* et moyennant une autre condition sur σ (proposition 7.4), l'existence d'une *factorisation spéciale*.

La factorisation en mots lexicographiques standards est de ce type, nous le montrons dans le paragraphe 7.4.

De même que la factorisation de Spitzer (Cf. § 7.5 .Cependant, celle-ci n'est pas de type b bien que l'ordre sur l'ensemble J correspondant soit spécial. Nous montrons dans ce paragraphe comment on peut en déduire cependant une factorisation spéciale que nous utiliserons au chapitre 9 pour donner une démonstration complètement combinatoire de la formule de Spitzer.

Enfin, dans le paragraphe 7.6, nous indiquons lorsque $\mathfrak{X} = \mathbf{R}$ comment on peut introduire d'autres factorisations spéciales associées à toute fonction continue strictement monotone.

7.2. Préliminaires algébriques.

Nous utiliserons la méthode des crochets déjà utilisée par Meyer-Wunderli [28] et Hall [19] pour la détermination de certaines bases dans les algèbres de Lie libres. Nous reprenons aussi, dans ce qui suit, les notations de Schützenberger [35].

Soit $D = D(\mathfrak{X})$ le système algébrique libre à une seule opération (ne satisfaisant à aucune identité) sur $\mathfrak{X}$. Par définition, $D = D^+ \cup \mathfrak{X}$ où D^+ est construit par induction comme l'ensemble des symboles $d = [d', d'']$ avec $d', d'' \in D$. Notons par D^* le monoïde libre engendré par D.

Tout $g \in D^*$ possède une décomposition unique notée $\delta^* g$ qui est un élément de $\mathfrak{X}^*$ (Cf. § 7.1).

Supposons-nous maintenant donnés un ensemble totalement ordonné J et une application $\sigma : D \longrightarrow J$. Nous définissons alors par induction un sous-ensemble H de D par les règles suivantes :

$\mathfrak{X} \subset H$ et si $d = [d', d''] \in D^+$, $d \in H$ si et si seulement si

(H1) $d', d'' \in H$

(H2) $\sigma d' < \sigma d''$

(H3) ou bien $d'' \in \mathfrak{X}$ ou bien si $d'' = [d''', d^{IV}]$

alors $\sigma d' \geqq \sigma d'''$.

Soit maintenant H_0 le sous-ensemble des éléments

$$g = d_1 d_2 \ldots d_s \quad \text{de} \quad D^*$$

tels que

$$(H_0 1) \quad d_1, d_2, \ldots, d_s \in H,$$

et si $s > 1$, tels que

$$(H_0 2) \quad \sigma d_1 \geqq \sigma d_2 \geqq \ldots \geqq \sigma d_s .$$

L'application δ^* envoie tous les éléments de H_0 sur $\mathfrak{X}^*$. Nous nous proposons donc de voir dans quelles conditions la restriction de δ^* à H_0 est une bijection de H_0 sur $\mathfrak{X}^*$. Nous montrerons plus loin que de telles conditions entraînent l'existence d'une factorisation (S). Montrons tout d'abord la

PROPOSITION 7.1. - *Pour tout couple* (σ, J), *l'application* $\delta^* : H_0 \longrightarrow \mathfrak{X}^*$ *est une surjection.*

PREUVE. - Nous introduisons d'abord un sous-ensemble H_1 de D^* contenant H_0 et les éléments $g = d_1 d_2 \ldots d_s$ de D^* $(s > 1)$ tels que pour un entier k $(1 \leqslant k < s)$, l'élément $d_1 d_2 \ldots d_k$ appartient à H_0 et tels que

$$(H_1 1) \quad d_{k+1}, d_{k+2}, \ldots, d_s \in \mathfrak{X}$$

et

$$(H_1 2) \quad \sigma d_k < \sigma d_{k+1} .$$

Le sous-ensemble H_1 contient en particulier $\mathfrak{X}^*$. Pour démontrer la proposition, il suffit donc de définir une application $\psi : H_1 \longrightarrow H_1$ telle que si $g \in H_1 \setminus H_0$, alors

$$\lambda\psi g < \lambda g \qquad \text{et si} \qquad g \in H_0 ,$$

alors

$$\lambda\psi g = \lambda g .$$

En fait, la définition de l'application ψ que nous donnons ci-après nous permet, pour tout $f \in \mathfrak{X}^*$, de construire un élément $g \in H_0$ tel que $\delta^* g = f$.

Soit donc $g = d_1 d_2 \ldots d_s$ un élément de H_1.

Nous envisageons plusieurs cas.

D'abord, on pose $\psi g = g$ si $k = s$ ou si $s = 1$ (c'est-à-dire $g \in H_0$).

D'autre part, lorsque $1 \leqslant k < s$ puisque $d_{k+1} \in \mathfrak{X}$ les conditions (H1), (H2) et (H3) sont satisfaites pour le couple (d_k , d_{k+1}).

On a ainsi

$$[d_k , d_{k+1}] \in H . \tag{7.2.1}$$

Lorsque $1 = k < s$, nous posons $\psi g = [d_1 , d_2] d_3 \ldots d_s$ et alors $\psi g \in H_1$ et pour $1 < k < s$ si

$$\sigma d_{k-1} \geqslant \sigma [d_k , d_{k+1}] , \tag{7.2.2}$$

nous posons

$$\psi g = d_1 d_2 \ldots d_{k-1} [d_k , d_{k+1}] d_{k+2} \ldots d_s .$$

Dans ce cas, les relations $(H_0 2)$ et (7.2.2) entraînent alors que $\psi g \in H_1$.

Pour ces deux cas, nous posons aussi $l = k$.

Lorsque $1 < k < s$, si la relation (7.2.2) n'est pas satisfaite, soit l le plus petit entier $(1 \leqslant l < k)$ tel que l'on ait

$$\sigma d_m < \sigma[d_{m+1} , \ldots , [d_k , d_{k+1}] \ldots] \tag{7.2.3}$$

pour $l \leqslant m \leqslant k-1$.

Si $l = 1$, on pose

$$\psi g = [d_1, [d_2, \ldots, [d_k, d_{k+1}] \ldots]] d_{k+2} \ldots d_s$$

et si $l > 1$

$$g = d_1 d_2 \ldots d_{l-1} [d_l, [d_{l+1}, \ldots, [d_k, d_{k+1}] \ldots]] d_{k+2} \ldots d_s$$

Nous avons encore $\psi g \in H_1$.

En effet, d'abord si $l = k-1$, c'est vrai puisque les relations $(H_o 1)$, (7.2.2) pour $m = k-1$ et (7.2.1) entraînent que les relations (H 1), (H2) et (H3) sont vérifiées pour le couple (d', d'') tel que

$$d' = d_{k-1} \quad \text{et} \quad d'' = [d_k, d_{k+1}]$$

et ainsi

$$[d_{k-1}, [d_k, d_{k+1}]] \in H .$$

D'où la propriété suit par définition de l (égal, dans ce cas, à $k-1$).

Pour $1 \leqslant l < k-1$, le résultat suit par récurrence sur m, puisque si l'on suppose

$$[d_{m'}, \ldots, [d_k, d_{k+1}] \ldots] \in H \qquad (7.2.4)$$

pour un certain m' $(l < m' \leqslant k-1)$, alors les relations (7.2.4), $(H_o 1)$, (7.2.3) pour $m = m'-1$ et $(H_o 2)$ entraînent que les relations (H1), (H2) et (H3) sont vérifiées pour le couple (d', d'') où

$$d' = d_{m'-1} \quad \text{et} \quad d'' = [d_{m'}, \ldots, [d_k, d_{k+1}] \ldots] .$$

D'où

$$[d_{m'-1}, [d_{m'}, \ldots, [d_k, d_{k+1}] \ldots]] \in H .$$

On a ainsi successivement

$$[d_k, d_{k+1}] \in H$$

$$[d_{k-1}, [d_k, d_{k+1}]] \in H$$

$$[d_l, [d_{l+1}, \ldots, [d_k, d_{k+1}] \ldots]] \in H .$$

Si $l = 1$, la propriété est alors démontrée et si $l > 1$ la définition de l entraîne

$$\sigma d_{l-1} \geq \sigma[d_l, [d_{l+1}, \ldots, [d_k, d_{k+1}] \ldots]]$$

et encore $\psi g \in H_1$, puisque $g \in H_1$ et $l < k$.

Dans tous les cas où $1 \leqslant k < s$, c'est-à-dire lorsque $g \in H_1 - H_o$, pour définir ψg, on fait toujours l'opération $(d_k, d_{k+1}) \longrightarrow [d_k, d_{k+1}]$ on a ainsi

$$\lambda \psi g < \lambda g .$$

D'où la proposition 7.1 est démontrée.

Soit $\mathcal{H}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{X}^*$ défini par

$$\mathcal{H} = \{ \delta^* d : d \in H \}$$

et pour tout $j \in J$ le sous-ensemble

$$Y_j = \mathcal{H} \cap \delta^* \sigma^{-1} j .$$

Les sous-ensembles $\{Y_j : j \in J\}$ de $\mathfrak{X}^*$ forment alors une famille totalement ordonnée par J.

La proposition précédente entraîne qu'à tout $f \in \mathfrak{X}^{*+}$ on peut associer au moins une suite $(d_1, d_2, \ldots, d_s)$ d'éléments de D telle que les conditions $(H_o 1)$ et $(H_o 2)$ soient remplies ; d'où encore si l'on pose

$$\sigma d_1 = j_1, \ldots, \quad \sigma d_s = j_s$$

et

$$\delta^* d_1 = f_1, \ldots, \delta^* d_s = f_s,$$

f admet au moins une factorisation de la forme $f = f_1 f_2 \ldots f_s$ où $f_k \in Y_{j_k}$ et $j_1 \geq j_2 \geq \ldots \geq j_s$.

Ainsi la famille $\{Y_j : j \in J\}$ satisfait à la condition (I'). Si, en plus, l'application $\delta^* : H_o \longrightarrow \mathfrak{X}^*$ est bijective, alors à tout f correspond un et un seul mot $d_1 d_2 \ldots d_s$ de H_o, d'où f admet une et une seule factorisation $f_1 f_2 \ldots f_s$ telle que $f_k \in Y_{j_k}$ et $j_1 \geq j_2 \geq \ldots \geq j_s$.

D'où l'existence d'une factorisation (S). Résumons ces résultats dans une proposition.

PROPOSITION 7.2. - *Pour tout couple* (σ, J), *la famille* $\{Y_j : j \in J\}$ *où* $Y_j = \{\delta^* d : d \in H \text{ et } \sigma d = j\}$ *satisfait à la condition* (I') *et si* $\delta^* : H_o \longrightarrow \mathfrak{X}^*$ *est bijectif, alors les* $\{Y_j : j \in J\}$ *déterminent une factorisation* (S).

7.3. Les factorisations spéciales.

Dans cette section, nous donnons une condition suffisante pour que $\delta^* : H_o \longrightarrow \mathfrak{X}^*$ soit bijectif.

D'après la proposition 7.2, nous pouvons donc en déduire une factorisation (S). En fait, cette condition nous permet directement de montrer l'existence d'une factorisation (S) (lemme 7.1) et nous en déduisons ensuite seulement que $\delta^* : H_o \longrightarrow \mathfrak{X}^*$ est bijectif (lemme 7.2).

Enfin, on montre comment cette condition entraîne l'existence de factorisations spéciales.

A titre d'exemple, nous rappelons d'abord le résultat de Meier-Wunderli qui donne une première condition suffisante pour que $\delta^* : H_o \longrightarrow \mathfrak{X}^*$ soit bijectif.

THEOREME 7.1.(Meier-Wunderli [28]). - *Si* σ *est une injection de* D *dans* J *tel que* (HO) *si* $d = [d', d''] \in D$, *on ait* $\sigma d' < \sigma d$ *et* $\sigma d'' < \sigma d$, *alors* δ^* *établit une application bijective de* H_o *sur* $\mathfrak{X}^*$.

Pour la démonstration, nous renvoyons à l'article de Schützenberger [35] où une preuve originale est donnée dans le cas plus général des partitions de Širšov. Nous obtenons ainsi un nouvel exemple de factorisation (S) déjà signalé dans [34]. Dans cet article, Schützenberger donne deux autres exemples introduits par Spitzer [38] d'une part et par Chen, Fox & Lyndon [8] et Širšov [37] d'autre part.

Nous montrerons que ces deux exemples sont deux cas particuliers de factorisations spéciales construites ci-après.

Nous donnons maintenant une autre condition sur σ qui va entraîner d'abord que $\delta^* : H_o \longrightarrow \mathfrak{X}^*$ est bijectif et ensuite nous permettre de déterminer pour chaque couple (σ, J) une factorisation spéciale.

Cette condition sur σ généralise une condition introduite par Brunk [7] sur les mots multilinéaires.

Soit $\theta : \mathfrak{X}^{*+} \longrightarrow J$ une surjection satisfaisant la condition

(B) pour $f , f' \in \mathfrak{X}^{*+}$, on a $\theta f > \theta ff' > \theta f'$ ou

$$\theta f = \theta ff' = \theta f' \quad \text{ou} \quad \theta f < \theta ff' < \theta f' .$$

L'application $\sigma = \theta\delta^*$ est alors une surjection de D sur J. Formons le sous-ensemble H_o de D^* (Cf. § 7.2). Nous avons alors

PROPOSITION 7.3. - *δ^* établit une application bijective de H_o sur $\mathfrak{X}^*$.*

Nous pouvons étendre $\sigma : D \longrightarrow J$ à une surjection de D^* sur J en posant pour $g \in D^*$, $\sigma g = \theta\delta^* g$. D'après la condition (B), σ satisfait aux conditions (i) et (ii) suivantes. Soit g et $g' \in D^*$, on a les relations

(i) $\sigma g = \sigma g'$ si $\delta^* g = \delta^* g'$ et

(ii) l'une des trois conditions suivantes satisfaite

$$\sigma g > \sigma gg' > \sigma g' \; ; \; \sigma g = \sigma gg' = \sigma g' \; ; \; \sigma g < \sigma gg' < \sigma g' .$$

Formons le sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{X}^*$ défini par

$$\mathcal{B} = \{ f \in \mathfrak{X}^{*+} : \theta f' < \theta f \text{ pour toute factorisation } f = f' f'' \, (f' = 1 , f) \}$$

et pour tout $j \in J$, le sous-ensemble $Y_j = \mathcal{B} \cap \theta^{-1} j$. Nous démontrons d'abord le lemme 7.1 déjà donné par Brunk [7] pour les mots multilinéaires.

LEMME 7.1. - *La famille des sous-ensembles $\{Y_j : j \in J\}$ satisfait aux conditions* (I) *et* (I') *(ou encore détermine une factorisation* (S)).

PREUVE. - Soit $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ un mot de $\mathfrak{X}^{*+}$. Nous pouvons définir l'entier t_1 comme le plus petit entier tel que

$$\theta x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \leq \theta x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{t_1}}$$

pour tout k $(1 \leqslant k \leqslant r)$. Si $t_1 < r$, nous définissons t_2 comme le plus petit entier tel que

$$\theta x_{i_{t_1+1}} x_{i_{t_1+2}} \ldots x_{i_k} \leq \theta x_{i_{t_1+1}} x_{i_{t_1+2}} \ldots x_{i_{t_2}}$$

pour tout k $(t_1 + 1 \leqslant k \leqslant r)$ et ainsi de suite...

Nous obtenons ainsi une suite d'entiers

$$O = t_o < t_1 < t_2 < \ldots < t_s = r .$$

Posons

$$f_p = x_{i_{t_{p-1}+1}} x_{i_{t_{p-1}+2}} \ldots x_{i_{t_p}} \quad (p = 1, 2, \ldots, s)$$

Nous avons alors

$$f = f_1 f_2 \ldots f_s ;$$

ensuite

$$\theta f_1 \geq \theta f_2 \geq \ldots \geq \theta f_s \quad \text{car} \quad \theta f_1 \geq \theta f_1 f_2$$

par définition de t_1, d'où

$$\theta f_1 \geq \theta f_1 f_2 \geq \theta f_2$$

en vertu de la condition (B).

De même, la définition de t_2 donne $\theta f_2 \geq \theta f_2 f_3$; d'où encore $\theta f_2 \geq \theta f_2 f_3 \geq \theta f_3$ et ainsi de suite...

Enfin, par définition des t_p $(1 \leqslant p \leqslant s)$, nous avons encore $f_p \in Y_{j_p}$ si $\theta f_p = j_p$.

La condition (I') est donc satisfaite.

Il nous reste à voir que la condition (I) est aussi satisfaite ou encore que la factorisation est unique. En effet, soit $f = f_1 f_2 \ldots f_s$ une factorisation de f telle que $\theta f_1 \geq \theta f_2 \geq \ldots \geq \theta f_s$ et $f_1, f_2, \ldots, f_s \in \mathcal{B}$.

Posons

$$t_p = \lambda f_1 + \ldots + \lambda f_p \quad (1 \leqslant p \leqslant s)$$

et soit k un entier $\in [t_{p-1} + 1 , r]$. Il existe alors un et un seul indice p' $(p \leqslant p' \leqslant s)$ tel que $t_{p'-1} < k \leqslant t_{p'}$. Comme $f_{p'} \in \mathcal{B}$, on a

$$\theta f_{p'} \geqq \theta x_{i_{t_{p'-1}+1}} x_{i_{t_{p'-1}+2}} \dots x_{i_k}$$

(on a l'égalité si et seulement si $k = t_{p'}$).

Comme d'autre part $\theta f_p \geqq \dots \geqq \theta f_{p'}$, il résulte de la condition (B) que t_p est bien le plus petit entier tel que

$$\theta x_{i_{t_{p-1}+1}} x_{i_{t_{p-1}+2}} \dots x_{i_k} \leqq \theta x_{i_{t_{p-1}+1}} x_{i_{t_{p-1}+2}} \dots x_{i_{t_p}} = \theta f_p$$
$$(t_{p-1} + 1 \leqslant k \leqslant r)$$

Ce qui achève la démonstration du lemme 7.1.

Ainsi la donnée d'une surjection $\theta : \mathfrak{X}^* \longrightarrow J$ où J est totalement ordonné entraîne l'existence d'une factorisation (S) donnée par la famille $Y_j = \mathcal{B} \cap \theta^{-1} j$ $(j \in J)$.

Nous dirons que la factorisation (S) obtenue est *induite par le couple* (θ , J).

Formons le système algébrique libre D associé à (σ , J) (Cf. la section 7.2), puis le sous-ensemble H de D^*. Alors

LEMME 7.2. - δ^* *établit une bijection de* H *sur* $\mathcal{B}$.

PREUVE. - Nous montrons d'abord la propriété suivante.
Si $d \in H$, *on a alors* $\delta^* d \in \mathcal{B}$ *et en posant* $\delta^* d = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$, *on a de plus*

ou $r = 1$

ou $d = [d_1 , d_1'] \in D^+$ *et* $t = \lambda \delta^* d_1$ *est le plus petit entier* $(1 \leqslant t < r)$ *tel que* (7.3.1)

$$\theta x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \leqq \theta x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_t}$$

pour tout k $(1 \leqslant k < r)$.

Tout d'abord, la propriété est trivialement vraie pour les $d \in H$ tels que $\lambda \delta^* d = 1$, puisqu'alors $\delta^* d = d$ $(\in \mathfrak{X})$. Supposons

donc la propriété vraie pour les d tels que $\lambda\delta^* d < r$ et procédons par induction sur r. Si $d \in H$ et $\lambda\delta^* d > 1$, posons $\delta^* d = f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$ $(r > 1)$. Alors par définition de l'ensemble H et en vertu de la condition (ii) sur σ, il existe un entier $p \geqslant 1$ et une suite $d_1, d_2, \dots, d_p, d'_p$ d'éléments de H tels que

$$d = [d_1, [d_2, [\dots [d_p, d'_p] \dots]]]$$

$$d'_p \in \mathfrak{X} \quad \text{et} \tag{7.3.2}$$

$$\sigma d > \sigma d_1 \geqq \sigma d_2 \geqq \dots \geqq \sigma d_p < \sigma d'_p .$$

Posons

$$\lambda_0 = \Lambda_c = 0 , \quad \lambda_q = \lambda\delta^* d_q \quad (1 \leqslant q \leqslant p)$$

et

$$\Lambda_q = \lambda_1 + \dots + \lambda_q \quad (1 \leqslant q \leqslant p).$$

Ainsi

$$r = \lambda_1 + \dots + \lambda_p + 1 = \Lambda_p + 1 .$$

Soit $k \in [1, r-1]$; il existe alors un entier q $(1 \leqslant q \leqslant p)$ tel que l'on ait

$$\Lambda_{q-1} < k \leqslant \Lambda_q .$$

Puisque $\lambda_q < r$ et que $d_q \in H$, on a alors par récurrence $\delta^* d_q \in \mathfrak{B}$; donc en particulier

$$\theta x_{i_{\Lambda_{q-1}+1}} \dots x_{i_k} \leqq \theta x_{i_{\Lambda_{q-1}+1}} \dots x_{i_{\Lambda_q}} \tag{7.3.3.}$$

(l'égalité étant satisfaite dans le seul cas où $k = \Lambda_q$). Si $q = 1$, les relations (7.3.2) donnent

$$\sigma d > \sigma d_1$$

et nous avons

$$\theta f = \sigma d > \sigma d_1 = \theta x_{i_1} \dots x_{i_{\Lambda_1}} \geqq \theta x_{i_1} \dots x_{i_k} \tag{7.3.3'}$$

en vertu de la relation (7.3.3) pour $q = 1$, l'égalité étant satisfaite dans le seul cas où $k = \Lambda_1$. On a donc en particulier si $t = \lambda_1 = \lambda\delta^* d_1 > 1$,

$$\theta x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} < \theta x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_t}. \qquad (7.3.3'')$$

Si $q > 1$, il résulte alors de la condition (ii) sur σ, des relations (7.3.2) et (7.3.3) que

$$\sigma d > \sigma d_1 \geqq \sigma d_1 d_2 \dots d_{q-1} = \theta x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{\Lambda_{q-1}}} \geqq \sigma d_{q-1} \geqq \sigma d_q \geqq \theta x_{i_{\Lambda_{q-1}+1}} \dots x_{i_k} ;$$

d'où l'on tire, à cause de la propriété (B) (ou des conditions (i) et (ii) sur σ)

$$\sigma d = \theta f > \sigma d_1 = \theta x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_t} \geqq \theta x_{i_1} \dots x_{i_{\Lambda_{q-1}+1}} \geqq \theta x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \geqq$$

$$\geqq \theta x_{i_{\Lambda_{q-1}+1}} \dots x_{i_k}.$$

Soit

$$\theta f > \theta x_{i_1} \dots x_{i_k} \qquad \text{et} \qquad (7.3.4)$$

$$\theta x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_t} \geqq \theta x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}. \qquad (7.3.4')$$

Il résulte donc de (7.3.3') et (7.3.4) que

$$\delta^* d = f \in \mathcal{B},$$

et de (7.3.3'') et (7.3.4') que la condition sur t de la propriété (7.3.1) est bien satisfaite. Ceci achève la démonstration de la propriété (7.3.1).

Réciproquement, nous montrons maintenant que pour tout $f \in \mathcal{B}$, il existe un et un seul $d \in H$ tel que $\delta^* d = f$. C'est trivialement vrai pour les mots f de longueur 1, puisqu'on a alors $d = f (\in \mathcal{X})$. Supposons le résultat établi pour tous les mots $f \in \mathcal{B}$ de longueur $< r$ et procédons par récurrence sur r. Soit $f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} \in \mathcal{B}$ $(r > 1)$. D'après la propriété (7.3.1), s'il existe $d = [d_1, d_1']$ appartenant à H tel que $\delta^* d = f$, alors $t = \lambda \delta^* d_1$ est le plus petit entier tel que

$$\theta x_{i_1} \dots x_{i_k} \leqq \theta x_{i_1} \dots x_{i_t} \quad \text{pour tout } k \in [1, r-1]. \qquad (7.3.5)$$

Pour démontrer la propriété, il nous suffit alors de montrer qu'il existe un et un seul couple (d_1, d_1') d'éléments de H tels que

$$\delta^* d_1 = x_{i_1} \dots x_{i_t}$$

et

$$\delta^* d_1' = x_{i_{t+1}} \dots x_{i_r}$$

et que $[d_1, d'_1] \in H$. Soit donc t le plus petit entier vérifiant (7.3.5). Si $t > 1$, nous avons ainsi

$$\theta x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} < \theta x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_t}$$

pour tout k $(1 \leqslant k \leqslant t-1)$, c'est-à-dire $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_t} \in \mathcal{B}$ et la même conclusion si $t = 1$. Puisque $t < r$, par récurrence il existe donc un élément $d_1 \in H$ et un seul tel que

$$\delta^* d_1 = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_t}.$$

De même, si $t = r-1$, il existe bien $d'_1 \in H$ tel que $\delta^* d'_1 = x_{i_{t+1}} = x_{i_r}$. Enfin, si $t < r-1$, nous avons $x_{i_{t+1}} \dots x_{i_r} \in \mathcal{B}$; car si on avait

$$\theta x_{i_1} \dots x_{i_{t'}} \geqq \theta x_{i_{t+1}} \dots x_{i_r}$$

pour un certain t' $(t+1 \leqslant t' \leqslant r)$, les relations (B) entraîneraient

$$\theta x_{i_1} \dots x_{i_t} < \theta x_{i_1} \dots x_{i_r} < \theta x_{i_{t+1}} \dots x_{i_r} \leqq \theta x_{i_{t+1}} \dots x_{i_{t'}} \quad (7.3.6)$$

soit

$$\theta x_{i_1} \dots x_{i_t} < \theta x_{i_1} \dots x_{i_{t'}} < \theta x_{i_{t+1}} \dots x_{i_{t'}}$$

ce qui contredirait la définition de t. Puisque $r-t < r$, par récurrence il existe encore un et un seul élément $d'_1 \in H$ tel que $\delta^* d'_1 = x_{i_{t+1}} \dots x_{i_r}$. D'où la condition (H1) est satisfaite pour la paire (d_1, d'_1). Ensuite, la relation (7.3.6) entraîne que l'on a $\sigma d_1 < \sigma d'_1$ d'où la condition (H2) est satisfaite. Enfin, si $r-t > 1$, on a alors $d'_1 = [d'_{11}, d'_{12}] \in D^+$. D'où il existe un entier t'' $(t+1 \leqslant t'' < r)$ tel que $\delta^* d'_{11} = x_{i_{t+1}} \dots x_{i_{t''}}$. Mais la relation (7.3.5) entraîne pour $k = t''$

$$\theta x_{i_1} \dots x_{i_t} \geqq \theta x_{i_1} \dots x_{i_{t''}} \geqq \theta x_{i_{t+1}} \dots x_{i_{t''}}$$

soit $\sigma d_1 \geqq \sigma d'_{11}$. D'où la propriété (H3) satisfaite. Ainsi $[d_1, d'_1] \in H$ et $\delta^* [d_1, d'_1] = f$. Ce qui achève la démonstration du lemme 7.2.

A tout mot $g = d_1 d_2 \dots d_s$ de H_o, on peut donc faire correspondre de façon bijective une suite $f_1, f_2, \dots, f_s$ de mots de $\mathcal{B}$ tels que $\theta f_1 \geqq \theta f_2 \geqq \dots \geqq \theta f_s$. Il suffit de prendre $f_1 = \delta^* d_1, \dots, f_s = \delta^* d_s$ d'après le lemme 7.2. Ensuite, par le lemme 7.1, il correspond à cette suite un et un seul mot f de $\mathcal{X}^*$ $(f = f_1 f_2 \dots f_s)$.

La proposition 7.3 est ainsi démontrée.

Une conséquence de la proposition 7.3 est que tout mot $f \in \mathcal{B}$ ($\equiv \mathcal{H}$), de longueur $\lambda f \geqslant 2$, admet toujours une factorisation $f_1 f_2$ où f_1 et $f_2 \in \mathcal{B}$ et $\theta f_1 < \theta f_2$.

D'autre part, pour obtenir la factorisation unique d'un mot quelconque de f en mots de $\mathcal{B}$ soit $f_1 f_2 \ldots f_s$ où

$$\theta f_1 \geqq \theta f_2 \geqq \ldots \geqq \theta f_s ,$$

on peut déterminer par la méthode de la proposition 7.1 l'élément unique g de H_o tel que $\delta^* g = f$.

Cette méthode sera illustrée dans les exemples que nous donnerons au paragraphe suivant.

Donnons enfin une condition suffisante pour qu'un couple $(\theta\ J)$ satisfaisant (B) induise une factorisation spéciale.

PROPOSITION 7.4. - *Si $\mathcal{X}$ est totalement ordonné, si l'application $\theta : \mathcal{X}^* \longrightarrow J$ satisfait la condition* (B) *et que l'on a pour* $x, x' \in \mathcal{X}$

$$x < x' \iff \theta x < \theta x' \qquad (7.3.7)$$

(dans $\mathcal{X}$) (dans J)

alors l'ordre induit par θ^{-1} sur les éléments de $\mathcal{B}$ est spécial. Si, de plus, la restriction de θ à l'ensemble $\mathcal{R}$ des mots primitifs est injective et que l'on a

$$\theta f = \theta f^p \qquad (7.3.8)$$

pour tout $f \in \mathcal{R}$ et tout entier $p > 0$, alors la factorisation (S) *induite par* (θ , J) *est spéciale.*

PREUVE. - Il nous faut vérifier d'abord

$$f , f' \in \mathcal{B} , \theta f \geqq \theta f' \Longrightarrow \mathbf{L} f \geqq \mathbf{P} f \quad \text{(dans } \mathcal{X}\text{)}.$$

En effet, soit

$$f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \quad \text{et} \quad f' = x_{i'_1} x_{i'_2} \ldots x_{i'_{r'}} .$$

En vertu des conditions (B), on a

$$\theta f \geqq \theta x_{i_r} \quad \text{et} \quad \theta x_{i'_1} \leqq \theta f'$$

dans les deux cas, l'égalité n'étant satisfaite que si

$$\lambda f \quad \text{ou} \quad \lambda f' = 1 ,$$

d'où

$$\mathbf{L} f = x_{i_r} \geq x_{i_1} = \mathbf{P} f' .$$

Pour la seconde propriété, notons que si l'on avait $f = f'^p$ $f' \in \mathcal{R}$ et p entier > 1, alors on aurait $\theta f = \theta f'$ d'après (7.3.8) et f ne pourrait appartenir à $\mathcal{B}$.

Donc $\mathcal{B}$ ne contient que des éléments primitifs et puisque $Y_j = \mathcal{B} \cap \theta^{-1} j$ et que la restriction de θ à $\mathcal{R}$ est injective, tout Y_j ne contient qu'un seul élément. La factorisation induite est donc de type b, donc spéciale d'après la première partie.

Dans les prochains paragraphes, nous allons montrer comment certaines factorisations déjà connues peuvent être induites par des couples (θ , J) ayant les propriétés ci-dessus.

7.4. Factorisation en mots lexicographiques standards.

Nous avons déjà rappelé au paragraphe 5.3 la factorisation en mots lexicographiques standards.

Nous voulons maintenant démontrer qu'en prenant de façon appropriée un ensemble totalement ordonné J et une application $\theta : \mathcal{X}^* \longrightarrow J$ satisfaisant la condition (B), la factorisation (θ , J) est justement la factorisation en mots lexicographiques standards.

Soit donc $\mathcal{X}$ un ensemble totalement ordonné. Prenons pour ensemble J, l'ensemble $\mathcal{R}$ des mots primitifs de $\mathcal{X}^*$, que nous munissons de l'ordre total suivant (que nous appellerons *ordre lexicographique circulaire et que nous noterons par* $\leqq$) :
si $j , j' \in J$, alors $j \leqq j' \Longleftrightarrow j^{\lambda j'} \preceq j'^{\lambda j}$ (7.4.1)

(pour l'ordre lexicographique noté $\preceq$).

Nous avons bien défini là un ordre. En effet,

$$j \leqq j' \quad \text{et} \quad j' \leqq j$$

entraînent

$$j^{\lambda j'} = j'^{\lambda j} ,$$

d'où $j = j'$ puisque j et j' sont primitifs.

Ensuite, si $j \leqq j'$ et $j' \leqq j''$, nous avons

$$j^{\lambda j'} \cdot \lambda j'' \underset{=}{\prec} j'^{\lambda j} \cdot \lambda j'' \underset{=}{\prec} j''^{\lambda j} \cdot \lambda j'$$

soit

$$j^{\lambda j''} \underset{=}{\prec} j''^{\lambda j} \quad j \leqq j''.$$

Tout mot $f \in \mathfrak{X}^{*+}$ peut s'écrire univoquement $f = (j)^q$ où $j \in J$ et où q est un entier positif. Nous posons alors $\theta f = j$.

PROPOSITION 7.5. - *Si* j *et* j' *sont deux éléments distincts de* J, *alors*

$$m < \theta(mM) < \theta(Mm) < M \qquad (7.4.2)$$

où $m = \min(j, j')$ *et* $M = \max(j, j')$ *et si de plus,* j *et* j' *sont standards pour l'ordre lexicographique ordinaire et tels que* j *est un facteur initial de* j', *alors* $j < j'$.

PREUVE. - En vertu des propriétés de l'ordre lexicographique, les relations (7.4.2) sont évidentes pour un couple (j, j') tel que $\lambda j = \lambda j'$.

Supposons donc

$$\lambda j < \lambda j'.$$

Si j est un facteur initial de j', nous posons

$$j' = j^q j'' \quad \text{avec} \quad q \text{ maximal } (q > 0) \quad \text{et} \quad j'' \in \mathfrak{X}^{*+}$$

et si j n'est pas un facteur initial de j', nous posons encore

$$j' = j^q j'' \quad \text{avec} \quad q = 0 \quad \text{et} \quad j'' = j'.$$

Ecrivons

$$j = x_1 x_2 \ldots x_r \quad j' = x'_1 x'_2 \ldots x'_r, \quad \text{et} \quad j'' = x''_1 x''_2 \ldots x''_r.$$

Deux cas sont alors à considérer :

(i) ou il existe un entier k $(1 \leqslant k \leqslant \min(r , r''))$ tel que

$$x_k \neq x'_{k'} = x''_k \quad \text{où} \quad k' = qr + k$$

(ce qui est toujours le cas si $r'' \geqslant r$ car q est maximal)

(ii) où alors $r'' < r$, $q > 0$ et j'' est un facteur initial de j et nous pouvons poser

$$j = j'' j''' \quad (j''' \in \mathfrak{X}^{*+}) .$$

Dans le cas (i), en prenant pour k le plus petit entier $(1 \leqslant k \leqslant \min(r , r''))$ tel que $x_k \neq x_k$, nous pouvons écrire

$$j^{q+2} = j^q x_1 x_2 \ldots x_k \ldots x_r \; x_1 x_2 \quad \ldots \; x_k \; \ldots \; x_r$$

$$j\, j' = j^{q+1} j'' = j^q x_1 x_2 \ldots x_k \ldots x_r \; x''_1 x''_2 \quad \ldots \; x''_k \; \ldots \; x''_{r''}$$

$$(j'j)^2 = j^q j'' j^q j j'' j = j^q x''_1 x''_2 \ldots x''_k \ldots x''_{r''} \; j^q \; x_1 x_2 \quad \ldots \; x_k \; \ldots \; x_r \; j'' j$$

$$j'^2 = j^q j'' j^q j'' = j^q x''_1 x''_2 \ldots x''_k \ldots x''_{r''} \; j^q \; x''_1 x''_2 \quad \ldots \; x''_k \; \ldots \; x''_{r''}$$

D'où, en comparant ces mots par rapport à l'ordre lexicographique

$$j < j\, j' < j'\, j < j' \quad \text{si} \quad x_k < x''_k \quad (\text{dans } \mathfrak{X})$$

et

$$j > j\, j' > j'\, j > j' \quad \text{si} \quad x_k > x''_k \quad (\text{dans } \mathfrak{X}) .$$

Dans le cas (ii) , on a posé $j = j'' j'''$ et q étant positif, nous pouvons écrire

$$j^{q+3} = j^q j'' j''' j'' \; (j''' j'') \; j'''$$

$$(jj')^2 = j^q j''(j''' j'')(j'' j''') j'$$

$$(j'j)^2 = j^q j''(j'' j''') j^{q-1} j''(j''' j'') j$$

$$(j')^3 = j^q j'' j'' j''' \; j^{q-1} j''(j'' j''') j^{q-1} j'' .$$

Puisque j est primitif et que $j''' \in \mathfrak{X}^{*+}$ on ne peut avoir

$$j = j'' j''' = j''' j'' .$$

(Cf. Lemmes 3 et 4 de [26]). D'où, en comparant les mots

$$j^{q+3},\ (j\ j')^2\ ,\ (j'\ j)^2 \quad \text{et} \quad (j')^3\ ,$$

nous avons

$$j < j\ j' < j'\ j < j' \qquad \text{si} \quad j'''\ j'' \prec j''\ j'''$$

et

$$j > j\ j' > j'\ j > j' \qquad \text{si} \quad j'''\ j'' \succ j''\ j'''\ .$$

Maintenant, si j et j' sont des mots standards tels que j est un facteur initial de j', alors $j' = j^q\ j''$ avec q entier positif maximal et $j'' \in \mathcal{X}^{*+}$.

Si l'on avait $j > j^q\ j''$, dans le cas (i) on aurait alors

$$x_k > x_k'' \Longrightarrow j \succ j'' \Longrightarrow j^q\ j'' \succ j''$$

et par suite $j' = j^q\ j''$ ne serait pas standard ; dans le cas (ii), on aurait

$$j'''\ j'' \succ j''\ j''' = j$$

et là encore j ne serait pas standard.

Ce qui achève la démonstration de la proposition.

$\theta : \mathcal{X}^* \longrightarrow J$ est une surjection satisfaisant, d'après la proposition précédente, la condition (B) et trivialement sa restriction à $\mathcal{X}$ est bijective et les conditions (7.3.7) et (7.3.8) sont remplies.

Il résulte alors de la proposition 7.4 que *la factorisation induite par* (θ, J) *est une factorisation spéciale.* Elle est, de plus, *identique à la factorisation de Širšov en mots lexicographiques standards*. En effet, si f est standard, alors $f \prec f''$ pour toute factorisation $f = f'\ f''$ $(f', f'' \in \mathcal{X}^{*+})$.

D'autre part, puisque $\lambda f > \lambda f''$, on a $f \prec f''$ si et si seulement $\theta f < \theta f''$ ou encore d'après la condition (B) si et seulement si $\theta f' < \theta f$, c'est-à-dire

$$f \in \mathcal{B} = \{ f \in \mathcal{X}^{*+} : \theta f' < \theta f \quad \text{pour} \quad f = f'\ f''\ (f' \neq 1\ ,\ f)\}.$$

Ensuite, si f et $f' \in \mathcal{B}$, alors $f \prec f'$ si et seulement si $\theta f = f < f' = \theta f'$.

C'est évidemment vrai si $\lambda f \geqslant \lambda f'$ et dans le cas $\lambda f < \lambda f'$ lorsque f n'est pas un facteur initial de f'.

Enfin, lorsque f est un facteur initial de f', soit $f' = f^q f''$ avec $q > 0$ et $f'' \in \mathcal{X}^{*+}$, on a toujours $f < f'$ d'après la seconde partie de la proposition 7.5 ; donc encore dans ce cas,

$$f \prec f^q f'' \Longleftrightarrow f < f^q f'' .$$

7.5. La factorisation de Spitzer.

Spitzer [38] a introduit une factorisation d'un sous-ensemble du monoïde libre $\mathcal{X}^*$ engendré par $\mathcal{X} = \mathbf{R}$ (la droite réelle). Schützenberger [34] a montré, en l'étendant à tous les mots de $\mathcal{X}^*$, que cette factorisation était un exemple de factorisation (S).

Dans ce paragraphe, nous démontrons comment cette factorisation peut être induite par un couple (θ, J) et comment on peut en déduire une factorisation spéciale.

Cette factorisation spéciale nous permettra, au chapitre 9, de donner une démonstration complètement combinatoire de l'identité de Spitzer.

Prenons $\mathcal{X} = \mathbf{R}$ (la droite réelle) et munissons le sous-ensemble $\mathcal{R}$ des mots primitifs du monoïde libre $\mathcal{X}^*$ de l'ordre lexicographique circulaire induit par l'ordre total de $\mathbf{R}$. Dénotons par J le produit cartésien $J = \mathbf{R} \times \mathcal{R}$. J est alors muni d'un ordre total si l'on pose pour

$$(r, f) \quad \text{et} \quad (r', f') \in R \times \mathcal{R},$$

$$(r, f) < (r', f') \Longleftrightarrow r < r' \quad (\text{dans } \mathbf{R}) \qquad (7.5.1)$$

ou si $r = r'$ et $f < f'$ pour l'ordre lexicographique circulaire de $\mathcal{R}$.

Nous désignons maintenant par τ l'application $\tau : \mathcal{X}^* \longrightarrow \mathbf{R}$ qui fait correspondre au mot $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ de $\mathcal{X}^*$ le nombre réel

$$\tau f = \sum_{k=1}^{r} x_{i_k} / \lambda f .$$

Il est immédiat que

$$\tau f < \tau f' \Longrightarrow \tau f < \tau f\, f' = \tau f'\, f < \tau f' \qquad (7.5.2)$$

et

$$\tau f = \tau f' \Longrightarrow \tau f = \tau f\, f' = \tau f'\, f = \tau f' .$$

En effet, il suffit de remarquer que si a, a', b et b' sont quatre nombres réels tels que b et $b' \neq 0$, alors l'inégalité

$$\frac{a}{a'} < \frac{b}{b'} \Longrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}$$

et évidemment

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+a'}{b+b'} = \frac{a'}{b'}$$

Tout $f \in \mathfrak{X}^*$ peut s'écrire univoquement $f = f'^q$ où $f' \in \mathfrak{R}$ et q est un entier positif. Nous posons $\pi f = f'$. (π est la fonction θ du paragraphe précédent).

Alors l'application $\theta : \mathfrak{X}^* \longrightarrow J$ qui au mot $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ associe le couple $(\tau f, \pi f)$ de J *satisfait la condition* (B). En effet, si $\theta f < \theta f'$ (dans J) alors

- ou $\tau f < \tau f'$ (dans $\mathbf{R}$) et l'on a $\tau f < \tau f\, f' = \tau f' f < \tau f'$ d'où

$$\theta f < \theta f\, f' < \theta f' \quad \text{et} \quad \theta f < \theta f'\, f < \theta f'$$

- ou $\tau f = \tau f'$ mais alors $\pi f < \pi f'$ (dans $\mathfrak{R}$) et d'après la proposition 7.5, nous avons

$$\pi f < \pi f\, f' < \pi f' \quad \text{et} \quad \pi f < \pi f'\, f < \pi f'$$

et

$$\tau f = \tau ff' = \tau f' f = \tau f' .$$

D'où

$$\theta f < \theta f\, f' < \theta f' \quad \text{et} \quad \theta f < \theta f'\, f < \theta f' \quad \text{(dans } J\text{)}$$

D'autre part, la condition (7.3.7) est trivialement satisfaite.

Ensuite, la *restriction de* θ à $\mathfrak{R}$ *est une injection* car si f et f' sont deux mots distincts $\in \mathfrak{R}$ et $\tau f = \tau f'$ alors

$$\pi f \neq \pi f' \quad \text{d'où} \quad \theta f \neq \theta f' .$$

Enfin, si $f = f'^q$ avec $f' \in \mathcal{R}$ et $q > 1$, on a évidemment $\tau f = \tau f'$ et $\pi f = \pi f'$ d'après les résultats du paragraphe précédent.

D'où $\theta f = \theta f'$ et la condition (7.3.8) est ainsi satisfaite.

Il résulte alors de la proposition (7.4) que *la factorisation induite par* (θ , J) *est une factorisation spéciale*, que nous désignerons par *factorisation spéciale de Spitzer*.

Chaque $Y_j = \mathcal{B} \cap \theta^{-1} j$ est réduit à un seul élément, et si

$$f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \in \mathcal{B} ,$$

alors la ligne polygonale joignant dans le plan, muni d'un système d'axes de coordonnées, les points

$$(0 , 0) , (1 , x_{i_1}) , (2 , x_{i_1} + x_{i_2}) , \ldots , (r , x_{i_1} + \ldots + x_{i_r})$$

est située au-dessous ou sur la corde joignant les points $(0 , 0)$ et $(r , x_{i_1} + \ldots + x_{i_r})$.

S'il existe des entiers r' $(1 \leqslant r' < r)$ tels que les points $(r' , x_{i_1} + \ldots + x_{i_{r'}})$ se trouvent sur cette corde, nous pouvons caractériser ces entiers r'.

Soit $\eta : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{R}$ une bijection ; l'ordre lexicographique sur $\mathcal{R}$ induit un ordre total sur $\mathcal{Y}$. On peut donc munir $\mathcal{Y}^*$ de l'ordre lexicographique induit par l'ordre de $\mathcal{Y}$.

Soit alors $r_1 , r_2 , \ldots , r_s$ la suite de tous les entiers tels que les points $(r_1 , x_{i_1} + \ldots + x_{i_{r_1}}) , \ldots , (r_s , x_{i_1} + \ldots + x_{i_{r_s}})$ sont sur la corde joignant

$$(0 , 0) \quad \text{et} \quad (r , x_{i_1} + \ldots + x_{i_r})$$

$(1 \leqslant r_1 < r_2 < \ldots < r_s < r)$ et posons

$$\eta g_1 = x_{i_1} \ldots x_{i_{r_1}} , \ \eta g_2 = x_{i_{r_1+1}} \ldots x_{i_{r_2}} , \ldots , \ \eta g_s = x_{i_{r_s+1}} \ldots , x_{i_2} .$$

Alors *le mot* $g_1 g_2 \ldots g_s$ *est un mot lexicographique standard dans le monoïde libre* $\mathcal{Y}^*$.

Exemple. - Considérons dans le monoïde libre $\mathfrak{X}^*$ engendré par $\mathfrak{X} = \mathbf{R}$ le mot correspondant à la suite

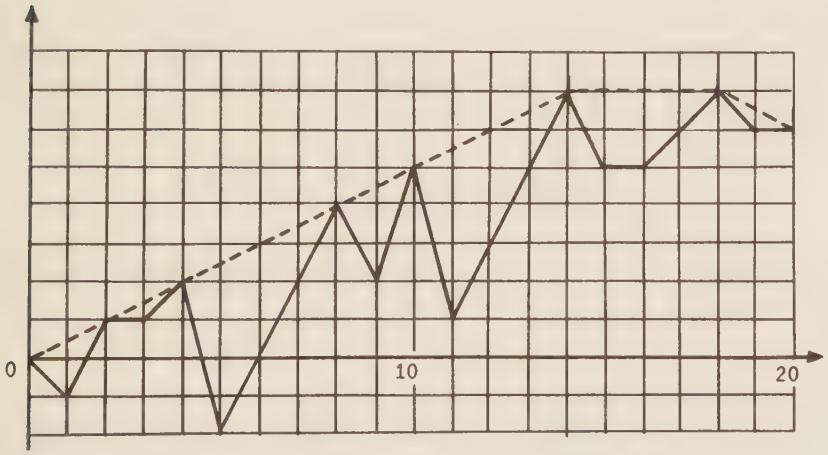
$$S = (-1, 2, 0, 1, -4, 2, 2, 2, -2, 3, -4, 2, 2, 2, -2, 0, 1, 1, -1, 0)$$

c'est-à-dire le mot $f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$ où $r = 20$ et où

$$(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r})$$

est identique à la suite S .

Dans le plan, considérons un système d'axes rectangulaires et traçons la ligne polygonale joignant les points $(0, 0)$, $(1, x_{i_1})$, $(2, x_{i_1} + x_{i_2})$, ..., $(20, x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_{20}})$. Nous obtenons



Par la méthode des crochets, décrite dans le paragraphe 7.2, nous construisons l'élément unique de H_0 correspondant à f et nous obtenons

[[-1 2][0 1]][[[[-4 2] 2] 2][-2 3]] [[[-4 2] 2] 2] [[[-2 0] 1] 1] [-1 0].

D'où la factorisation de f correspondant aux suites

$$(-1,2,0,1) \quad (-4,2,2,2,-2,3) \quad (-4,2,2,2) \quad (-2,0,1,1) \quad (-1,0).$$

Observons que les trois premiers mots correspondent à des lignes polygonales dont les cordes ont même pente, que si l'on pose

$\eta g_1 = -1,\ 2 \qquad \eta g_2 = 0,\ 1 \qquad \eta g_3 = -4,\ 2,\ 2,\ 2$

$\eta g_4 = -2,\ 3 \qquad \eta g_5 = -4,\ 2,\ 2,\ 2$, alors

$(g_1\ g_2)\ (g_3\ g_4)\ (g_5)$ est justement la factorisation en mots lexicographiques standards.

Observons enfin sur cet exemple que les mots f de $\mathcal{B}$ vérifient

$$\mathbf{P}\, f \leq \mathbf{L}\, f .$$

7.6. Factorisation spéciale induite par une fonction continue strictement monotone.

DEFINITION (Hardy, Polya, Littlewood 20 p. 65.). - Soit ψ une fonction continue strictement monotone définie dans un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ et $(x_{i_k})\ (1 \leqslant k \leqslant r)$ une famille de r points de I. On appelle *moyenne* de cette famille relativement à ψ le nombre

$$\mathfrak{M}_\psi((x_{i_k})_{(1\leqslant k\leqslant r)}) = \psi^{-1}\left(\frac{\Sigma\psi(x_{i_k})}{r}\right) .$$

Pour une famille $(x_{i_k})_{(1\leqslant k\leqslant r)}$ donnée, le nombre $\mathfrak{M}_\psi((x_{i_k})_{(1\leqslant k\leqslant r)})$ est unique et l'on a

$$\min\,(x_{i_k}) \leqslant \mathfrak{M}_\psi((x_{i_k})_{(1\leqslant k\leqslant r)}) \leqslant \max\,(x_{i_k})$$

et nous avons l'égalité de ces trois membres dans le seul cas où tous les x_{i_k} sont égaux.

La factorisation spéciale induite se définit comme suit. J est encore l'ensemble totalement ordonné défini au paragraphe précédent.

Soit $\mathfrak{A}^*$ le monoïde libre engendré par I et nous désignons par τ_ψ l'application $\mathfrak{A}^* \longrightarrow \mathbf{R}$ qui fait correspondre au mot $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ le nombre réel

$$\tau_\psi f = \mathfrak{M}_\psi((x_{i_k})_{(1\leqslant k\leqslant r)}) = \psi^{-1}\left(\frac{\Sigma\psi(x_{i_k})}{r}\right)$$

et par $\theta_\psi : \mathfrak{A}^* \longrightarrow J$ l'application qui au mot $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ de $\mathfrak{A}^*$ associe le couple $(\tau_\psi f\ ,\ \pi f)$ de J.

L'application θ_ψ satisfait la condition (B).

Supposons, en effet, que pour $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ et

$$f' = x_{i'_1} x_{i'_2} \ldots x_{i'_{r'}},$$

on ait

$$\tau_\psi f < \tau_\psi f' .$$

Alors, puisque ψ est continu et strictement monotone

$$\frac{\Sigma\psi(x_{i_k})}{r} < \frac{\Sigma\psi(x_{i'_k})}{r'} .$$

D'où

$$\frac{\Sigma\psi(x_{i_k})}{r} < \frac{\Sigma\psi(x_{i_k}) + \Sigma\psi(x_{i'_k})}{r + r'} < \frac{\Sigma\psi(x_{i'_k})}{r'} .$$

Soit

$$\tau_\psi f < \tau_\psi f \; f' = \tau_\psi f' \; f < \tau_\psi f' .$$

Enfin, il est bien évident que si

$$\tau_\psi f = \tau_\psi f' \quad \text{alors} \quad \tau_\psi f = \tau_\psi f \; f' = \tau_\psi f' \; f = \tau_\psi f' .$$

Comme d'autre part, la fonction π satisfait la condition (B), ceci est suffisant pour montrer que θ_ψ satisfait la condition (B). Les mêmes autres remarques que pour la factorisation de Spitzer s'appliqueraient ici pour montrer qu'on obtient encore une factorisation spéciale.

Lorsque ψ est une application affine, on retrouve la factorisation de Spitzer.

Lorsque

$$I = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\} \quad \text{et} \quad \psi : x \longrightarrow \log x$$

$\mathfrak{M}_\psi((x_{i_k})_{(1 \leqslant k \leqslant r)})$ est la moyenne géométrique de x_{i_k}.

Lorsque

$$I = \{ x \in \mathbf{R} : x > 0 \} \quad \text{et} \quad \psi : x \longrightarrow \frac{1}{x}$$

$\mathfrak{M}_{\psi}((x_{i_k})_{(1 \leq k \leq r)})$ est la moyenne harmonique des x_{i_k}.

Toutes ces fonctions induisent donc une factorisation spéciale de $\mathfrak{X}^*$ où $\mathfrak{X}$ est un intervalle de la droite réelle.

8. Applications des factorisations spéciales
Un théorème combinatoire non commutatif

8.1. Introduction.

Nous nous proposons dans ce chapitre de donner une nouvelle démonstration du théorème combinatoire 6.1. Il va s'agir en fait de construire une certaine permutation φ de $\mathfrak{X}^*$, où $\mathfrak{X}^*$ est le monoïde libre engendré par un ensemble totalement ordonné $\mathfrak{X}$, associée à toute factorisation spéciale de $\mathfrak{X}^*$.

La méthode employée va consister, comme dans le chapitre 4, à faire correspondre à tout mot $f \in \mathfrak{X}^*$ une permutation Πf d'un ensemble fini qu'on écrira comme produit de cycles disjoints sous une forme dite standard que l'on définira.

Lorsque $\mathfrak{X} = \mathbf{R}$, une telle correspondance $f \longrightarrow \Pi f$ a déjà été introduite, au moins de façon implicite, par Foster & Stuart [14], Barton & Mallows [3] et Rényi [31].

Mais dans tous ces articles, seul le cas des mots multilinéaires f est étudié.

En d'autres termes, si $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ est une suite de r nombres réels qu'on considère comme une réalisation de r variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_r$, disons indépendantes et équidistribuées, il est supposé dans ces articles que la fonction de répartition des X_k est continue. Les x_{i_k} $(1 \leqslant k \leqslant r)$ sont donc tous distincts deux à deux et le mot $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ correspondant, multilinéaire.

Une factorisation unique d'un tel mot f est alors définie à partir des "lower records" chez Foster ou des "éléments saillants" chez Rényi qui sont les x_{i_k} tels que

$$x_{i_k} = \min \{ x_{i_{k'}} : 1 \leqslant k' \leqslant k \}.$$

Si $k_1, k_2, \ldots, k_s$ sont les p indices des éléments saillants, alors

$$f_1 f_2 \ldots f_s \qquad \text{où} \qquad f_p = x_{i_{k_{p-1}+1}} \ldots x_{i_{k_p}}$$

$$(k_o = 0 \ ; \ 1 \leqslant p \leqslant s)$$

est justement la factorisation du mot f multilinéaire en mots lexicographiques standards.

La permutation φ que nous allons construire va, au contraire, être définie pour tous les mots f de $\mathfrak{X}^*$ non nécessairement multilinéaires.

Sa construction exige cependant que l'on démontre d'abord quelques lemmes afin de définir Πf sans ambiguité.

Nous avons cru bon de terminer ce chapitre par un exemple qui permet de suivre toutes les transformations définies au cours de ces lemmes.

Signalons enfin que les résultats de ce chapitre ont déjà été donnés dans une note aux Comptes-Rendus [13].

8.2. Rappel de définitions.

$\mathfrak{X}^*$ étant le monoïde libre engendré par un ensemble $\mathfrak{X}$, nous avons introduit au § 6.3 deux familles de fonctions $(\nu_{x,x'})$ et $(\xi_{x,x'})_{((x,x')\in\mathfrak{X}^2)}$ définies sur $\mathfrak{X}^*$ à valeurs entières en posant pour

$$f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \quad \text{et} \quad \beta f = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r}$$

$\nu_{x,x'} f$ = nombre d'indices k tels que $x_{i_k} = x$ (8.2.1)

et $x_{j_k} = x'$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$.

$\xi_{x,x'} f = 0$ si $\lambda f = 1$ (8.2.2)

= nombre d'indices k tels que $x_{i_k} = x$

et $x_{i_{k+1}} = x'$ $(1 \leqslant k \leqslant r-1)$ si $\lambda f > 1$.

Supposons-nous maintenant donnée une factorisation de Schützenberger de type b, c'est-à-dire un sous-ensemble $\mathcal{H}$ fixe de mots primitifs et $\preceq$ un ordre total sur $\mathcal{H}$ tel que chaque élément $f \in \mathcal{X}^{*+}$ a une et une seule factorisation de la forme $f_1 f_2 \dots f_s$ $(s > 0)$ où

(i) $f_1, f_2, \dots, f_s \in \mathcal{H}$

(ii) $f_1 \succeq f_2 \succeq \dots \succeq f_s$.

Posons

$$f_p = x_{p,0} x_{p,1} \dots x_{p,\lambda_p - 1} \qquad (\lambda f_p = \lambda_p : 1 \leqslant p \leqslant s)$$

et convenons aussi, dans ce qui suit, que le deuxième indice l des variables $x_{p,l}$ est un entier modulo λ_p $(1 \leqslant p \leqslant s)$.

Nous pouvons alors définir sur $\mathcal{X}^*$ une famille de fonctions à valeurs entières $(\mu_{x,x'})_{((x,x') \in \mathcal{X}^2)}$ associée à cette factorisation en posant

$$\mu_{x,x'} f = \text{nombre de couples } (p, l)$$

tels que

$$x_{p,l} = x \quad \text{et} \quad x_{p,l+1} = x'$$

$$(1 \leqslant p \leqslant s, \quad 0 \leqslant l \leqslant \lambda_p - 1).$$

Notre but est d'abord de construire, associée à une telle factorisation, une permutation φ de $\mathcal{X}^*$ telle que

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \alpha\varphi f = \alpha f \\ &(2) \qquad \nu_{x,x'} f = \mu_{x,x'} \varphi f \qquad (f \in \mathcal{X}^*) \end{aligned} \tag{8.2.3}$$

pour tout couple $(x, x') \in \mathcal{X}^2$.

Lorsque, en plus, le couple $(\mathcal{H}, \preceq)$ satisfait la condition (Sp) suivante

(Sp) Il existe un sous-ensemble $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}^2$ tel que pour tout couple f, f' de mots de $\mathcal{H}$ tels que $f \succeq f'$, on a

$$(\mathbf{L}f, \mathbf{P}f') \notin \mathcal{X}_0,$$

nous disons que $(\mathcal{H}, \preceq, \mathcal{X}_0)$ est *spécial*.

Lorsque $\mathfrak{X}$ est un ensemble totalement ordonné ($\leqslant$ son ordre) nous disons simplement que $(\mathfrak{H}, \underline{\preceq})$ est *spécial* ou que la factorisation (S) associée est *spéciale* si

$$\mathfrak{X}_0 = \{(x, x') \in \mathfrak{X}^2 : x \leqslant x'\}. \text{ (Cf. (7.1.1) et (7.1.2))}.$$

Dans le chapitre précédent, nous avons vu comment construire des factorisations spéciales à partir de couples (θ, J) où J est un ensemble totalement ordonné et où $\theta : \mathfrak{X}^* \longrightarrow J$ vérifie la condition (B)

$$f, f' \in \mathfrak{X}^* \Longrightarrow \theta f > \theta ff' > \theta f' \quad \text{ou} \quad \theta f = \theta ff' = \theta f' \quad \text{ou} \quad \theta f < \theta ff' < \theta f'.$$

La factorisation en mots lexicographiques standards (Cf. § 7.4) était de ce type, de même que la factorisation de Spitzer (Cf. § 7.5) et aussi les factorisations sur le monoïde libre engendré par un intervalle I de la droite réelle, induites par une fonction continue strictement monotone (§ 7.6).

Etant donnés un sous-ensemble fixe $\mathfrak{X}_0$ de $\mathfrak{X}^2$ et $(\mathfrak{H}, \underline{\preceq})$ une factorisation (S) de type b, alors nous montrerons (théorème 8.1 ci-dessous) que la permutation φ associée à $(\mathfrak{H}, \underline{\preceq})$ vérifie

$$\nu_{x,x'} f = \xi_{x,x'} \varphi f \tag{8.2.4}$$

identiquement pour tout couple $(x, x') \in \mathfrak{X}_0$ si et seulement si $(\mathfrak{H}, \underline{\preceq}, \mathfrak{X}_0)$ est spécial.

Remarquons tout de suite que si la définition de la famille $(\mu_{x,x'})_{(x,x') \in \mathfrak{X}^2}$ dépend du couple $(\mathfrak{H}, \underline{\preceq})$ considéré, les définitions de $\nu_{x,x'}$ et $\xi_{x,x'}$ ne dépendent que du couple $(x, x') \in \mathfrak{X}^2$ choisi. De plus, si $f = x_i$ $(\lambda f = 1)$, alors **card** $\alpha f = 1$ et la restriction de φ à $\alpha^{-1}\alpha f$ est trivialement l'application identique. Or, $\nu_{x_i,x_i} f = 0$ et $\xi_{x_i,x_i} f = 1$. (8.2.4) n'est donc pas satisfait. Ce qui montre que lorsque $(\mathfrak{H}, \underline{\preceq}, \mathfrak{X}_0)$ est spécial, alors $\mathfrak{X}_0$ *ne contient aucun élément de la diagonale de* $\mathfrak{X}^2$.

8.3. Construction de la permutation φ.

La permutation φ aura la propriété (1) de (8.2.3) et nous pourrons donc supposer que h est un élément fixe de $\overline{\mathfrak{X}}^*$ et construire la restriction de φ à la classe abélienne $\alpha^{-1} h$.

Nous reprenons les mêmes notations qu'au paragraphe 4.2, c'est-à-dire que nous désignons encore par $x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_d}$ les $d = \mathbf{dim}\ h$ lettres x de $\mathfrak{X}$ telles que $h x > 0$, et posons

$$h\, x_{u_t} = n_t \qquad (1 \leqslant t \leqslant d)$$

$$r = \sum_{t=1}^{d} n_t \qquad \text{et}$$

$$\beta' h = x_{u_1}^{n_1} x_{u_2}^{n_2} \ldots x_{u_d}^{n_d} = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r}$$

(le mot non décroissant de la classe abélienne $\alpha^{-1} h$) et désignons par N(h) l'ensemble des couples $\{(x_{u_t}, m_t) : 1 \leqslant m_t \leqslant n_t \quad 1 \leqslant t \leqslant d\}$.

Soit $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ un mot de $\alpha^{-1} h$. Alors l'application

$$\Pi f : (x_{i_k}, \gamma_k f) \longrightarrow (x_{j_k}, \gamma_k \beta' h)$$

est une permutation de l'ensemble N(h). Ecrivons-la comme produit de cycles disjoints (Cf. 4.1)

$$\Pi f = (B_1)\ (B_2) \ldots (B_s) \qquad (s > 0)$$

où

$$B_p = ((x_{p,0}, \varepsilon_{p,0})\ (x_{p,1}, \varepsilon_{p,1}) \ldots (x_{p,\lambda_p-1}, \varepsilon_{p,\lambda_p-1}))$$

avec

$$x_{p,0}, x_{p,1}, \ldots, x_{p,\lambda_p-1} \in \mathfrak{X}$$

$$\varepsilon_{p,0}, \varepsilon_{p,1}, \ldots, \varepsilon_{p,\lambda_p-1} \in \mathbf{N}$$

$(1 \leqslant p \leqslant s)$ et $\{(x_{p,l}, \varepsilon_{p,l}) : 1 \leqslant p \leqslant s \quad 0 \leqslant l \leqslant \lambda_p - 1\} = N(h)$.

Dans ce qui suit, convenons aussi que le deuxième indice l des variables $x_{p,l}$, $\varepsilon_{p,l}$, ... est un entier modulo λ_p.

Avec cette convention, et par définition même de la permutation Πf, à tout $k \in [1, r]$, correspond un et un seul couple (p, l) $(1 \leqslant p \leqslant s ; 0 \leqslant l \leqslant \lambda_p - 1)$ tel que

$$(x_{p,l}, \varepsilon_{p,l}) = (x_{i_k}, \gamma_k f) ; \qquad (8.3.1)$$

et l'on a[1]

$$(x_{j_k}, \gamma_k \beta' h) = (\Pi f)(x_{i_k}, \gamma_k f) = (\Pi f)(x_{p,l}, \varepsilon_{p,l}) = (x_{p,l+1}, \varepsilon_{p,l+1}) \qquad (8.3.2)$$

---

(1) Nous faisons ici la convention de noter par $(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k})$ un cycle d'une permutation σ de n objets $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ si l'on a $0 < k \leqslant n$ et $\sigma a_{i_1} = a_{i_2}$, $\sigma a_{i_2} = a_{i_3}$, ..., $\sigma a_{i_{k-1}} = a_{i_k}$, $\sigma a_{i_k} = a_{i_1}$.

Nous vérifions d'abord le

LEMME 8.1. - *Soit* p *et* p' *deux entiers* $\in [1, s]$ *et* l *et* l' *deux entiers pris modulo* λ_p *et* $\lambda_{p'}$ *respectivement tels que*

$$x_{p,l} = x_{p',l'} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{p,l} < \varepsilon_{p',l'}$$

alors on a

ou $\quad x_{p,l+1} < x_{p',l'+1}$

ou $\quad x_{p,l+1} = x_{p',l'+1}$ *et* $\varepsilon_{p,l+1} < \varepsilon_{p',l'+1}$.

PREUVE. - En effet, désignons par k et k' $\in [1, r]$ les entiers tels que l'on ait respectivement

$$(x_{i_k}, \gamma_k f) = (x_{p,l}, \varepsilon_{p,l})$$

et

$$(x_{i_{k'}}, \gamma_{k'} f) = (x_{p',l'}, \varepsilon_{p',l'}).$$

Alors, l'hypothèse $\varepsilon_{p,l} < \varepsilon_{p',l'}$ entraîne évidemment $\gamma_k f < \gamma_{k'} f$. Mais comme $x_{i_k} = x_{p,l} = x_{p',l'} = x_{i_{k'}}$, on a $k < k'$ par définition même de γ_k et $\gamma_{k'}$.

D'autre part, la définition de Πf donne

$$(x_{j_k}, \gamma_k \beta' h) = (\Pi f)(x_{i_k}, \gamma_k f) = (\Pi f)(x_{p,l}, \varepsilon_{p,l}) = (x_{p,l+1}, \varepsilon_{p,l+1})$$

et de même

$$(x_{j_{k'}}, \gamma_{k'} \beta' h) = (x_{p',l'}, \varepsilon_{p',l'+1}).$$

Ainsi $k < k'$ entraîne $x_{j_k} < x_{j_{k'}}$, c'est-à-dire

$$x_{p,l+1} < x_{p',l'+1}$$

ou si $x_{j_k} = x_{j_{k'}}$,

$$\gamma_k \beta' h < \gamma_{k'} \beta' h$$

soit

$$\varepsilon_{p,l+1} < \varepsilon_{p',l'+1}$$

Appliquons ce résultat dans le lemme suivant

LEMME 8.2. - *Le mot* $x_{p,0}\, x_{p,1} \ldots x_{p,\lambda_p-1}$ *est primitif* $(1 \leqslant p \leqslant s)$ *et si les deux mots* $x_{p,0}\, x_{p,1} \ldots x_{p,\lambda_p-1}$ *et* $x_{p',0}\, x_{p',1} \ldots x_{p',\lambda_{p'}-1}$ *sont conjugués, alors*

$$\varepsilon_{p,l} < \varepsilon_{p',l+l_0} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{p,l} > \varepsilon_{p',l+l_0}$$

pour tout $l \in [0\,,\ \lambda_p - 1]$, l_0 *étant l'entier modulo* λ_p *tel que*

$$x_{p,0}\, x_{p,1} \ldots x_{p,\lambda_p-1} = x_{p',l_0}\, x_{p',l_0+1} \ldots x_{p',\lambda_p+l_0-1} \qquad (1 \leqslant p < p' \leqslant s)$$

PREUVE. - Supposons donc que $x_{p,0}\, x_{p,1} \ldots x_{p,\lambda_p-1}$ n'est pas primitif.

Alors $x_{p,1}\ x_{p,2} \ldots x_{p,\lambda_p} = f'^{q}$ $(q > 1)$ où $f' \in \mathfrak{X}^{*+}$ et où l'entier q est maximal ; en posant $\lambda f' = m$, nous avons

$$x_{p,0} = x_{p,m} = \ldots = x_{p,(q-1)m}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{p,m-1} = x_{p,2m-1} = \ldots x_{p,qm-1}\,.$$

Supposons que

$$\varepsilon_{p,0} = \min\{\varepsilon_{p,0}\,,\ \varepsilon_{p,m}\ ,\ldots,\ \varepsilon_{p,(q-1)m}\}$$

(on peut toujours permuter circulairement le cycle B_p pour qu'il en soit ainsi).

En appliquant le précédent lemme pour $p = p'$ et

$$(l\,,\ l') = (0\,,\ (q-1)m)$$

on a

$$\varepsilon_{p,1} < \varepsilon_{p,0} \qquad \text{si} \quad m = 1\,.$$

D'où une contradiction.

Si $m > 1$, on a

$$\varepsilon_{p,1} < \varepsilon_{p,(q-1)m+1}\,.$$

D'où, en appliquant le lemme successivement à

$(l\ ,\ l') = (1\ ,\ (q-1)m+1)\ ,\ (2\ ,\ (q-1)m+2)\ \ldots\ (m-1\ ,\ qm-1)\ ,$

et $p = p'$, on a les inégalités

$$\varepsilon_{p,1} < \varepsilon_{p,(q-1)m+1}\ ;\ \varepsilon_{p,2} < \varepsilon_{p,(q-1)m+2}\ ;\ \ldots\ ;\ \varepsilon_{p,m} < \varepsilon_{p,qm}$$

Soit, en particulier, puisque $qm \equiv 0 \mod \lambda_p$

$$\varepsilon_{p,m} < \varepsilon_{p,0}$$

D'où une contradiction.

Ce qui démontre que le mot $x_{p,0}\ x_{p,1}\ \ldots\ x_{p,\lambda_p-1}$ est bien primitif.

Pour la seconde partie du lemme, supposons par exemple que $\varepsilon_{p,0} < \varepsilon_{p',l_o}$.

Puisque les deux mots

$$x_{p,0}\ x_{p,1}\ \ldots\ x_{p,\lambda_p-1} \quad \text{et} \quad x_{p',l_o}\ x_{p',l_o+1}\ \ldots\ x_{p',\lambda_p+l_o-1}$$

sont identiques, nous avons, en appliquant le lemme précédent,

$$\varepsilon_{p,1} < \varepsilon_{p',l_o+1}$$

d'où par itération

$$\varepsilon_{p,2} < \varepsilon_{p',l_o+2}\ ,\ \ldots\ ,\ \varepsilon_{p,\lambda_p-1} < \varepsilon_{p',\lambda_p+l_o-1}$$

Ce qui achève la démonstration du lemme.

Ces deux lemmes vont nous permettre d'écrire la permutation Πf sous une forme dite *standard*. Plus précisément, d'après le lemme 8.2, tout mot $x_{p,0}x_{p,1}\ldots\ x_{p,\lambda_p-1}$ est primitif. Le théorème 5.1 entraîne alors qu'il n'y a qu'un et qu'un seul mot de $\mathcal{H}$ conjugué à $x_{p,0}x_{p,1}\ \ldots\ x_{p,\lambda_p-1}$. Comme chacun des cycles (B_p) n'est défini qu'à une seule permutation circulaire près de ses éléments, on peut supposer désormais que

$$x_{p,0}\ x_{p,1}\ \ldots\ x_{p,\lambda_p-1} \in \mathcal{H} \qquad (1 \leqslant p \leqslant s)\ .$$

Sous cette hypothèse, toute relation

$$x_{p,0}\ x_{p,1}\ \ldots\ x_{p,\lambda_p-1} = x_{p',0}\ x_{p',1}\ \ldots\ x_{p',\lambda_{p'}-1}$$

$(p \neq p')$ entraîne alors, d'après la deuxième partie du lemme 8.2, que

$$\varepsilon_{p,l} < \varepsilon_{p',l} \quad \text{pour tout} \quad l \in [0\ ,\ \lambda_p - 1]$$

ou

$$\varepsilon_{p',l} < \varepsilon_{p,l} \quad \text{pour tout} \quad l \in [0\ ,\ \lambda_p - 1]\ .$$

De même Πf n'étant défini qu'à une permutation près de ses cycles, on peut supposer désormais que Πf est *sous forme standard*, c'est-à-dire que

(1) $\quad x_{p,0}\, x_{p,1} \ldots x_{p,\lambda_p-1} \in \mathcal{H} \quad (1 \leqslant p \leqslant s)$

(2) $\quad$ si $\quad 1 \leqslant p < p' \leqslant s\ , \quad$ alors (8.3.3)

ou $\quad x_{p,0}\, x_{p,1} \ldots x_{p,\lambda_p-1} \succ x_{p',0}\, x_{p',1} \ldots x_{p',\lambda_{p'}-1}$

ou $\quad x_{p,0}\, x_{p,1} \ldots x_{p,\lambda_p-1} = x_{p',0}\, x_{p',1} \ldots x_{p',\lambda_{p'}-1}$

mais $\varepsilon_{p,l} < \varepsilon_{p',l}$ pour tout $l \in [0\ ,\ \lambda_p - 1]$. Ainsi, chaque Πf a une et une seule forme standard

$$\Pi f = ((x_{1,0}\ , \varepsilon_{1,0}) \ldots (x_{1,\lambda_1-1}\ , \varepsilon_{1,\lambda_1-1})) \ \ldots \ ((x_{s,0}\ , \varepsilon_{s,0}) \ \ldots \ (x_{s,\lambda_s-1}\ , \varepsilon_{s,\lambda_s-1}))\ .$$

Nous posons

$$\varphi f = x_{1,0} \ldots x_{1,\lambda_1-1}\ x_{2,0} \ldots x_{2,\lambda_2-1} \ldots x_{s,0} \ldots x_{s,\lambda_s-1}\ . \quad (8.3.4)$$

Puisque Πf est une permutation de l'ensemble $N(h)$, nous avons bien $\varphi f \in \alpha^{-1} h$.

Il résulte alors des identités (8.3.1) et (8.3.2) qu'à tout entier $k \in [1\ ,\ r]$ correspond biunivoquement un couple $(p\ ,\ l)$ $(1 \leqslant p \leqslant s\ ;\ 0 \leqslant l \leqslant \lambda_p - 1)$ tel que

$$x_{i_k} = x_{p,l} \qquad \text{et} \qquad x_{j_k} = x_{p,l+1}\ .$$

Pour tout couple $(x\ ,\ x') \in \mathcal{X}^2$ il y a ainsi autant d'indices k tels que $x_{i_k} = x$ et $x_{j_k} = x'$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ que de couples $(p\ ,\ l)$ tels que $x_{p,l} = x$ et $x_{p,l+1} = x'$ $(1 \leqslant p \leqslant s\ ;\ 0 \leqslant l \leqslant \lambda_p - 1)$.

La condition (2) de (8.2.3) est ainsi satisfaite, soit

$$\nu_{x,x'}\, f = \mu_{x,x'}\, \varphi f \qquad (x\,,\, x') \in \mathfrak{X}^2 \,.$$

Nous allons montrer ensuite que l'application φ ainsi définie est bien une permutation de $\alpha^{-1} h$.

Le prochain lemme va nous permettre de déterminer, lorsque Πf est sous forme standard, la valeur des entiers $\varepsilon_{p,l}$ en fonction seulement des lettres du mot φf.

D'abord, à tout couple $(p\,,l)$ $(1 \leqslant p \leqslant s\ ;\ 0 \leqslant l \leqslant \lambda_p - 1)$, nous faisons correspondre le mot

$$c_{p,l} = x_{p,l}\, x_{p,l+1} \ldots x_{p,l+\Lambda-1} \quad \text{où} \quad \Lambda = r! \,.$$

Avec notre convention sur le second indice l' de $x_{p,l'}$ nous aurons ainsi $x_{p,l'} = x_{p,l''}$ si $l' \equiv l''$ mod λ_p.

Nous avons

LEMME 8.3. - *L'entier* $\varepsilon_{p,l}$ *est égal au nombre des couples* $(p'\,,l')$ *tels que*

$$\begin{aligned} &(1) \qquad x_{p',l'} = x_{p,l} \\ \textit{et} \qquad &(2) \qquad \textit{soit} \quad c_{p',l'} \end{aligned} \tag{8.3.6}$$

précède $c_{p,l}$ *dans l'ordre lexicographique*

$$(0 \leqslant l' \leqslant \lambda_{p'} - 1\ ;\ 1 \leqslant p' \leqslant s)$$

soit $c_{p',l'} = c_{p,l}$

$$(0 \leqslant l' \leqslant \lambda_{p'} - 1\ ;\ 1 \leqslant p' \leqslant p) \,.$$

PREUVE. - Soit deux couples $(p\,,l)$ et $(p'\,,l')$

$$(p\,,\, p' \in [1\,,\, s]\ ;\ 0 \leqslant l \leqslant \lambda_p - 1\ ;\ 0 \leqslant l' \leqslant \lambda_{p'} - 1)$$

tels que

$$x_{p,l} = x_{p',l'} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{p,l} < \varepsilon_{p',l'}$$

et considérons les deux mots associés $c_{p,l}$ et $c_{p',l'}$. Si

$$c_{p,l} \neq c_{p',l'} \,,$$

alors il existe un entier $l_o \geq 0$ tel que

$$x_{p,l} = x_{p',l'} \ , \ x_{p,l+1} = x_{p',l'+1} \ , \ \ldots \ , \ x_{p,l+l_o} = x_{p',l'+l_o}$$

et

$$x_{p,l+l_o+1} \neq x_{p',l'+l_o+1} \ .$$

Comme $\varepsilon_{p,l} < \varepsilon_{p',l}$, on a, par application du lemme 8.1

$$\varepsilon_{p,l} < \varepsilon_{p',l'} \Longrightarrow \varepsilon_{p',l+1} < \varepsilon_{p',l'+1} \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \varepsilon_{p,l+l_o} < \varepsilon_{p',l'+l_o}$$

et cette dernière inégalité entraîne encore

$$x_{p,l+l_o+1} < x_{p',l'+l_o+1} \ .$$

D'où $c_{p,l} < c_{p',l'}$. (8.3.7)

Si les deux couples $(p \ , \ l)$ et $(p' \ , \ l')$ sont distincts et si $c_{p,l} = c_{p',l'}$, alors, puisque d'après le lemme 8.2 les mots $x_{p,0} \, x_{p,1} \ldots x_{p,\lambda_p-1}$ et $x_{p',0} \, x_{p',1} \ldots x_{p',\lambda_{p'}-1}$ sont primitifs, $p \neq p'$; et Πf étant sous forme standard, la condition (2) de (8.3.3) entraîne $p < p'$.

Ainsi, si $\varepsilon_{p,l} = m$, il y a m couples $(p' \ , \ l')$ en comptant le couple $(p \ , \ l)$, tels que

$$x_{p',l'} = x_{p,l} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{p',l'} \leqslant m$$

et pour chacun de ces couples, ou $c_{p',l'}$ précède $c_{p,l}$ dans l'ordre lexicographique d'après (8.3.7), ou $c_{p',l'} = c_{p,l}$ mais $p \leqslant p'$.

Le lemme 8.3 est ainsi démontré.

Nous dirons maintenant qu'une permutation Π_o de N(h) est *standard* si elle peut s'écrire comme produit des cycles disjoints,

$$\Pi_o = (B_1) \, (B_2) \ \ldots \ (B_s)$$

où

$$(B_p) = ((x_{p,0} \ , \ \varepsilon_{p,0}) \, (x_{p,1} \ , \ \varepsilon_{p,1}) \ \ldots \ (x_{p,\lambda_p-1} \ , \ \varepsilon_{p,\lambda_p-1})) \qquad (1 \leqslant p \leqslant s)$$

et où

(1) $x_{p,0} \, x_{p,1} \ \ldots \ x_{p,\lambda_p-1} \in \mathcal{H} \qquad (1 \leqslant p \leqslant s)$ et si $s > 1$,

(2) $x_{p,0} \, x_{p,1} \ \ldots \ x_{p,\lambda_p-1} \succeq x_{p+1,0} \, x_{p+1,1} \ldots x_{p+1,\lambda_{p+1}-1} \quad (1 \leqslant p \leqslant s-1)$ (8.3.8)

(3) $\varepsilon_{p,l}$ est égal au nombre de couples (p', l') satisfaisant aux conditions (1) et (2) de (8.3.6)

$$(1 \leqslant p \leqslant s \ ; \ 0 \leqslant l \leqslant \lambda_p - 1).$$

A tout mot $f \in \alpha^{-1} h$ correspond une et une seule permutation standard, à savoir Πf. Inversement, à la permutation standard Π_o correspond un et un seul mot f tel que $\Pi f = \Pi_o$; ce mot est $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ avec $x_{i_k} = x_{p,l}$ où (p, l) est le couple tel que

$$(x_{p,l+1}, \varepsilon_{p,l+1}) = (x_{j_k}, \gamma_k \beta' h).$$

Ainsi Π est une bijection de $\alpha^{-1} h$ sur l'ensemble des permutations standards de $N(h)$.

Soit maintenant $f' = x_{v_1} x_{v_2} \ldots x_{v_r}$ un mot de $\alpha^{-1} h$. Il admet une et une seule factorisation

$$f' = f_1 f_2 \ldots f_s \qquad \text{où} \qquad f_1, f_2, \ldots, f_s \in \mathcal{H}$$

$$f_1 \geqq f_2 \geqq \ldots \geqq f_s$$

Posons

$$f_s = x_{p,0} x_{p,1} \ldots x_{0,\lambda_p - 1} \qquad (\lambda_p = \lambda f_p)$$

$(1 \leqslant p \leqslant s)$ et $\varepsilon_{p,l}$ égal au nombre de couples (p', l') satisfaisant aux conditions (1) et (2) de (8.3.6) $(1 \leqslant p \leqslant s \ ; \ 0 \leqslant l \leqslant \lambda_p - 1)$.

Formons la permutation $\Pi' f'$ donnée par le produit des cycles disjoints

$$\Pi' f' = (B_1) (B_2) \ldots (B_s)$$

où

$$(B_p) = ((x_{p,0}, \varepsilon_{p,0}) (x_{p,1}, \varepsilon_{p,1}) \ldots (x_{p,\lambda_p - 1}, \varepsilon_{p,\lambda_p - 1})) \qquad (1 \leqslant p \leqslant s)$$

Alors $\Pi' f'$ satisfait aux conditions (1), (2) et (3) de (8.3.8). Elle est donc standard. Comme la factorisation $f' = f_1 f_2 \ldots f_s$ est unique, Π' est alors une bijection de $\alpha^{-1} h$ sur l'ensemble des permutations standards de $N(h)$.

L'application φ s'écrit alors

$$\varphi = \Pi'^{-1} \Pi$$

et φ est ainsi une permutation de l'ensemble $\alpha^{-1} h$.

Nous allons résumer ces résultats dans le théorème suivant et donner la condition nécessaire et suffisante annoncée au début du paragraphe pour les factorisations (S) spéciales.

THEOREME 8.1. - *A tout couple* $(\mathcal{H}, \preceq)$ *satisfaisant les conditions* (S), *c'est-à-dire que* $\mathcal{H}$ *est un ensemble fixe de mots primitifs totalement ordonné par* $\preceq$, *tel que chaque élément* $f \in \mathcal{X}^{*+}$ *a une et une seule factorisation* $f_1 f_2 \ldots f_s$ $(s > 0)$ *où*

(i) $$f_1, f_2, \ldots, f_s \in \mathcal{H}$$

(ii) $$f_1 \succeq f_2 \succeq \ldots \succeq f_s ,$$

on peut associer une permutation φ *de* $\mathcal{X}^*$ *telle que pour tout couple* $(x, x') \in \mathcal{X}^2$, *on ait*

$$\nu_{x,x'} f = \mu_{x,x'} \varphi f$$

et $\alpha f = \alpha \varphi f$ *identiquement.*

Soit, de plus, $\mathcal{X}_0$ *un sous-ensemble de* $\mathcal{X}^2$; *on a alors, pour tout couple* $(x, x') \in \mathcal{X}_0$, *l'identité*

$$\nu_{x,x'} f = \xi_{x,x'} \varphi f$$

si et seulement si $(\mathcal{H}, \preceq, \mathcal{X}_0)$ *est spécial.*

PREUVE. - La première propriété a été démontrée plus haut. Pour la seconde, supposons d'abord que pour un sous-ensemble $\mathcal{X}_0$ de $\mathcal{X}^2$, $(\mathcal{H}, \preceq, \mathcal{X}_0)$ soit spécial. Soit φ la permutation associée. Nous avons toujours

$$\nu_{x,x'} f = \mu_{x,x'} \varphi f$$

identiquement pour tout $(x, x') \in \mathcal{X}^2$.

Posons pour $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \in \alpha^{-1} h$,

$$f' = \varphi f = x_{v_1} x_{v_2} \ldots x_{v_r} = f_1 f_2 \ldots f_s$$

où

$$f_p = x_{p,0}\, x_{p,1} \cdots x_{p,\lambda_p - 1} \in \mathcal{H} \quad (\lambda_p = \lambda f_p) \qquad (1 \leqslant p \leqslant s)$$

et

$$f_1 \geqq f_2 \geqq \cdots \geqq f_s .$$

Comme $\mathcal{X}_0$ ne peut contenir d'éléments de la diagonale de $\mathcal{X}^2$, on a $\nu_{x,x'}\, f = \xi_{x,x'}\, \varphi f = 0$ pour tout $(x , x') \in \mathcal{X}_0$ lorsque $\lambda f = 1$.

Supposons donc $\lambda f > 1$ et soit $(x , x') \in \mathcal{X}_0$. Puisque $(\mathcal{H}, \trianglelefteq , \mathcal{X}_0)$ est spécial, les seuls couples (p , l) tels que $x_{p,l} = x$ et $x_{p,l+1} = x'$ ne peuvent être

$$(1 , \lambda_1 - 1) , (2 , \lambda_2 - 1) , \ldots , (s , \lambda_s - 1)$$

et d'autre part, si $s > 1$, les seuls indices k tels que $x_{\nu_k} = x$ et $x_{\nu_{k+1}} = x'$ ne peuvent être

$$\lambda_1 , \lambda_1 + \lambda_2 , \lambda_1 + \cdots + \lambda_{s-1} .$$

On a donc identiquement

$$\mu_{x,x'}\, \varphi f = \nu_{x,x'}\, \varphi f \quad \text{pour} \quad (x , x') \in \mathcal{X}_0 ; \qquad (8.3.9)$$

soit

$$\nu_{x,x'}\, f = \xi_{x,x'}\, \varphi f \quad \text{pour} \quad (x , x') \in \mathcal{X}_0 .$$

Réciproquement, si cette dernière relation est satisfaite, cela entraîne l'identité (8.3.9), puisqu'on a toujours $\nu_{x,x'}\, f = \mu_{x,x'}\, \varphi f$, ou encore

$$\mu_{x,x'}\, f' = \xi_{x,x'}\, f' \quad \text{pour} \quad (x , x') \in \mathcal{X}_0 . \qquad (8.3.10)$$

Si $f' \in \mathcal{H}$, la factorisation de f' ne contient évidemment qu'un seul facteur $(s = 1)$ et la relation (8.3.10) entraîne que l'on a forcément

$$(x_{\nu_r} , x_{\nu_1}) \notin \mathcal{X}_0$$

ou encore, pour tout $f \in \mathcal{H}$

$$(\mathbf{L} f , \mathbf{P} f) \notin \mathcal{X}_0 . \qquad (8.3.11)$$

Soit alors $f_m = x_{m,0}\, x_{m,1} \ldots x_{m,\lambda_m - 1}$ et

$$f_{m'} = x_{m',0}\, x_{m',1} \ldots x_{m',\lambda_{m'}-1}$$

deux mots distincts de $\mathcal{H}$.

Si $f_m \succ f_{m'}$ (pour l'ordre dans $\mathcal{H}$), on a alors

$$\mu_{x,x'}\, f_m\, f_{m'} = \mu_{x,x'}\, f_m + \mu_{x,x'}\, f_{m'} = \xi_{x,x'}\, f_m\, f_{m'} \qquad (8.3.12)$$

pour $(x , x') \in \mathcal{X}_o$.

D'après (8.3.11)

$$(x_{m,\lambda_m - 1} , x_{m,0}) \quad \text{et} \quad (x_{m',\lambda_{m'}-1} , x_{m',0}) \notin \mathcal{X}_o. \qquad (8.3.13)$$

Si l'on avait $(x_{m,\lambda_m - 1} , x_{m',0}) \in \mathcal{X}_o$, on aurait pour

$$(x , x') = (x_{m,\lambda_m - 1} , x_{m',0}) ,$$

$$\mu_{x,x'}\, f_m\, f_{m'} = \xi_{x,x'}\, f_m\, f_{m'} - 1$$

d'après (8.3.13). Ce qui contredirait (8.3.12).

D'où

$$(x_{m,\lambda_m - 1} , x_{m',0}) \notin \mathcal{X}_o$$

ou encore

$$(\mathbf{L} f_m , \mathbf{P} f_{m'}) \notin \mathcal{X}_o. \qquad (8.3.14)$$

Les relations (8.3.11) et (8.3.14) entraînent donc que $(\mathcal{H}, \preceq , \mathcal{X}_o)$ est spécial.

Ce qui achève la démonstration du théorème 8.1.

Explicitons maintenant ce théorème pour les factorisations spéciales, dont nous avons donné une construction algébrique au chapitre précédent.

L'ensemble à considérer pour ces factorisations est l'ensemble $\mathcal{X}_o = \{(x , x') \in \mathcal{X}^2 : x \leqslant x'\}$ et pour cet ensemble, nous obtenons l'analogue du théorème 6.1', à savoir

THEOREME 6.2. - *La permutation* φ *associée à une factorisation spéciale vérifie* $\alpha\varphi f = \alpha f$ *identiquement et* $\nu_{x,x'}\, f = \xi_{x,x'}\, \varphi f$ *pour tout couple* $(x , x') \in \mathfrak{X}^2$ *tel que* $x < x'$.

Ce théorème nous permettra, dans le chapitre suivant, de montrer un résultat combinatoire sur les statistiques d'ordre.

Terminons ce chapitre par un exemple.

8.4. Exemple.

Considérons la factorisation (spéciale) en mots lexicographiques standards. Soit φ la permutation qu'on lui associe par la méthode du paragraphe 8.3. Nous illustrons la construction de cette permutation sur un exemple.

Prenons pour $\mathfrak{X}^*$ le monoïde engendré par $\mathbf{N}$ et considérons le mot $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} = 2\ 1\ 2\ 2\ 3\ 4\ 4\ 5\ 1\ 1\ 1\ 2$ de $\mathfrak{X}^*$ $(r = 12)$. On lui associe le mot non décroissant

$$f = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r} = 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 3\ 4\ 4\ 5 \ .$$

Formons l'ensemble des couples $N(h)$ où $h = \alpha f$.

$$N(h) = \{ (x_{u_t} , m_t) : 1 \leqslant m \leqslant n_t \ ; \quad 1 \leqslant t \leqslant d \}$$

où ici $d = 5$ $\quad x_{u_t} = t \quad (1 \leqslant t \leqslant 5)$

$$n_1 = 4 \qquad n_2 = 4 \qquad n_3 = 1 \qquad n_4 = 2 \qquad n_5 = 1 \ .$$

La permutation $\Pi f : (x_{i_k} , \gamma_k f) \longrightarrow (x_{j_k} , \gamma_k \beta f)$ de l'ensemble $N(h)$ peut s'écrire sous la forme classique

$$\Pi f = \begin{pmatrix} (2,1)\ (1,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (3,1)\ (4,1)\ (4,2)\ (5,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (2,4) \\ (1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)\ (3,1)\ (4,1)\ (4,2)\ (5,1) \end{pmatrix}$$

ou encore comme produit de cycles disjoints

$$\Pi f = ((2,1)\ (1,1)\ (1,2)\ (3,1))\ ((2,2)\ (1,3)\ (4,1))\ ((2,3)\ (1,4)\ (4,2))\ ((5,1)\ (2,4))$$

Observons le résultat du lemme 8.1. Par exemple, considérons les deux éléments $(x_{p,l} , \varepsilon_{p,l}) = (1,2)$ et $(x_{p',l'} , \varepsilon_{p',l'}) = (1,4)$; ils satisfont $x_{p,l} = x_{p',l'}$ et $\varepsilon_{p,l} < \varepsilon_{p',l'}$. Nous vérifions alors que $x_{p,l+1} = 3 < 4 = x_{p',l'+1}$.

Formons les mots $x_{p,0}\, x_{p,1} \ldots x_{p,\lambda_p-1}$ constitués dans chaque cycle par les premiers éléments de $(x_{p,l}\ ,\ \varepsilon_{p,l})$. Nous avons 2113, 214, 214, 52 et ils sont tous primitifs. (Cf. lemme 8.2).

D'autre part, les deux mots correspondant à $p = 2$ et $p = 3$ sont conjugués (214 et 214). On peut observer que l'on a les inégalités $\varepsilon_{2,l} < \varepsilon_{3,l}$ $l = 0,\ 1,\ 2$.

D'après (8.3.3), nous réécrirons chaque cycle de Πf de manière que chaque mot $x_{p,0}\, x_{p,1} \ldots x_{p,\lambda_p-1}$ appartienne à $\mathcal{H}$ (ici l'ensemble des mots minimum dans leurs classes de conjugués). Nous obtenons

$$\Pi f = ((1,1)\ (1,2)\ (3,1)\ (2,1))\ ((1,3)\ (4,1)\ (2,2))\ ((1,4)\ (4,2)\ (2,3))\ ((2,4)\ (5,1)).$$

Nous permutons ensuite les cycles entre eux de façon à satisfaire la condition (2) de (8.3.3) pour obtenir l'expression de Πf sous forme standard :

$$\Pi f = ((2,4)\ (5,1))\ ((1,3)\ (4,1)\ (2,2))\ ((1,4)\ (4,2)\ (2,3))\ ((1,1)\ (1,2)\ (3,1)\ (2,1)) \qquad (8.4.1)$$

et d'après (8.3.4), nous posons

$$\varphi f = x_{v_1}\, x_{v_2} \ldots x_{v_r} = 2\ 5\ 1\ 4\ 2\ 1\ 4\ 2\ 1\ 1\ 3\ 2\ .$$

Nous observons qu'en réordonnant les mots 25, 142, 143, et 1132 suivant l'ordre décroissant dans $\mathcal{H}$ et en les juxtaposant, ainsi, on ne fait pas apparaître de nouvelles paires croissantes de lettres successives (l'ordre dans $\mathcal{H}$ est spécial).

Nous avons

$$\nu_{2,5}\ f = \xi_{2,5}\ \varphi f = 1$$

(il s'agit du couple $(x_{i_{12}}\ ,\ x_{j_{12}})$ d'une part et du couple $(x_{v_1}\ ,\ x_{v_2})$ d'autre part).

De même

$$\nu_{1,4}\ f = \xi_{1,4}\ \varphi f = 2$$

$$\nu_{1,3}\ f = \xi_{1,3}\ \varphi f = 1\ .$$

Réciproquement, considérons le mot $f' = 2\ 5\ 1\ 4\ 2\ 1\ 4\ 2\ 1\ 1\ 3\ 2$. Il admet la factorisation unique $f_1\ f_2\ f_3\ f_4$ avec

$$f_1 = 25 \quad f_2 = 142 \quad f_3 = 142 \quad f_4 = 1132 \qquad (1 \leqslant p \leqslant s = 4)\ ;$$

posons

$$f_p = x_{p,0}\, x_{p,1} \cdots x_{p,\lambda_p - 1}.$$

A tout couple (p, l) nous faisons correspondre le mot $c_{p,l} = x_{p,l}\, x_{p,l+1} \cdots x_{p,l+\Lambda-1}$ où $\Lambda = r!$ puis nous déterminons les entiers $\varepsilon_{p,l}$ vérifiant les conditions (1) et (2) du lemme 8.3.

Par exemple, il y a 4 couples (p, l) tels que $x_{p,l} = 1$. Ce sont $(2,0)$, $(3,0)$, $(4,0)$ et $(4,1)$.

Les mots $c_{p,l}$ associés sont

$$c_{2,0} = 142142 \ldots$$

$$c_{3,0} = 142142 \ldots$$

$$c_{4,0} = 11321132 \ldots$$

$$c_{4,1} = 13211321 \ldots$$

Pour l'ordre lexicographique, nous avons

$$c_{4,0} < c_{4,1} < c_{2,0} = c_{3,0}$$

D'où l'on pose, d'après les conditions (1) et (2) du lemme 8.3

$$\varepsilon_{4,0} = 1 \quad \varepsilon_{4,1} = 2 \quad \varepsilon_{2,0} = 3 \quad \varepsilon_{3,0} = 4\ .$$

Si nous formons alors la permutation $\Pi' f'$ donnée par le produit des cycles disjoints

$$\Pi' f' = (B_1) \ldots (B_4)$$

où

$$(B_p) = ((x_{p,0}, \varepsilon_{p,0}) \ldots (x_{p,\lambda_p - 1}, \varepsilon_{p,\lambda_p - 1})) \qquad (1 \leqslant p \leqslant 4)$$

nous retrouvons l'expression (8.4.1).

D'où la correspondance

$f = 2\ 1\ 2\ 2\ 3\ 4\ 4\ 5\ 1\ 1\ 1\ 2 \longrightarrow \varphi f = 2\ 5\ 1\ 4\ 2\ 1\ 4\ 2\ 1\ 1\ 3\ 2$

obtenue par la permutation associée à la factorisation en mots lexicographiques standards.

Si nous prenons la factorisation de Spitzer (Cf. 7.5), nous avons une autre permutation φ ayant les mêmes propriétés.

La permutation Πf sous forme standard s'écrit alors

$$\Pi f = ((2,4)\ (5,1))\ ((2,2)\ (1,3)\ (4,1))\ ((2,3)\ (1,4)\ (4,2))\ ((1,1)\ (1,2)\ (3,1)\ (2,1))$$

correspondant au mot $f' = 2\ 5\ 2\ 1\ 4\ 2\ 1\ 4\ 1\ 1\ 3\ 2$.

Par cette permutation, nous associons à f le mot f'.

La démonstration que nous donnerons sera complètement combinatoire et il ne sera pas nécessaire de supposer b continu.

Nous définissons (voir début du § 9.3), pour tout σ , $\tau \in \mathfrak{S}_n$ et $f \in \mathfrak{X}_n^*$ $(n > 1)$, les deux quantités $U_\sigma f$ et $V_\tau f$. Il s'agit essentiellement de faire correspondre à tout $f \in \mathfrak{X}_n^*$ (non nécessairement multilinéaire) une bijection $\tau_f : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_n$ telle que

$$U_\sigma f = V_{\tau_f(\sigma)} f \quad \text{pour tout} \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n .$$

C'est l'objet du théorème 9.4. Là encore, c'est le cas des mots non multilinéaires f qui est le plus délicat et qui nous amène à définir une nouvelle factorisation (lemme 9.1). Le théorème 9.4 nous permet en outre de donner une preuve toute combinatoire du théorème 2.2 de Spitzer ([38] p. 327).

L'identité de Spitzer a été abondamment étudiée par ailleurs d'un point de vue analytique (Baxter [4], [5], Wendel [41], Kingman [21] et Atkinson [2]). Nous n'avons pas cherché ici à appliquer ces méthodes, mais avons préféré donner une preuve entièrement combinatoire de notre résultat. Signalons enfin que Sherman [36] établit une autre identité du type de Spitzer à partir de la formule de Witt non commutative. Nous terminons le chapitre par une simple application probabiliste des formules de Witt.

9.2. Un théorème sur les statistiques d'ordre.

Les théorèmes 6.1 et 8.1 ont une interprétation naturelle en calcul des probabilités. Nous la donnons maintenant.

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de n $(n > 1)$ variables aléatoires. Elle est dite en *dépendance symétrique* si la loi de probabilité du vecteur $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est invariante par permutation des indices $1, 2, \ldots, n$.

En particulier, toute suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées est en dépendance symétrique.

D'autre part, nous désignerons par $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ la suite des X_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ rangés en ordre non décroissant. Cette suite est encore appelée la *statistique d'ordre* de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Nous avons alors

THEOREME 9.1. - *Soit* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n > 1)$ *une suite de variables aléatoires en dépendance symétrique,* $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ *la statistique d'ordre de cette suite et* b *une fonction mesurable* $b : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ *telle que* $b(x, x') = 0$ *si* $x \geqslant x'$.

Alors les deux variables aléatoires (statistiques)

$$\sum_{k=2}^{n} b(X_k, X_k^*) \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{n} b(X_{k-1}, X_k)$$

ont même distribution.

Ce résultat ne dépend pas de la loi de probabilité des X_k. Il est en particulier valable pour les distributions singulières du vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Dans la preuve, on utilise une méthode souvent employée dans la théorie des fluctuations des sommes de variables aléatoires. (Cf. par exemple Sparre Andersen [1]).

PREUVE. - Considérons l'espace de probabilité $(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}_n, P_X)$ où $\mathcal{A}_n$ est la tribu borélienne de $\mathbf{R}^n$ et P_X la mesure de probabilité du vecteur X et soit

$$\nu : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow \sum_{k=2}^{n} b(x_k, x_k^*)$$

et

$$\xi : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow \sum_{k=2}^{n} b(x_{k-1}, x_k)$$

les variables aléatoires réelles définies dans $(\mathbf{R}^n, \mathcal{A}_n, P_X)$, où $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ désigne le vecteur de $\mathbf{R}^n$ dont les coordonnées sont les x_k rangés en ordre non décroissant.

Désignons par t la bijection qui envoie le vecteur

$$(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$$

de $\mathbf{R}^n$ sur le mot $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$ du sous-ensemble $\mathcal{X}_n^*$ (des mots de longueur n) du monoïde libre $\mathcal{X}^*$ engendré par $\mathcal{X} = \mathbf{R}$.

D'après le théorème 8.1, pour φ (ou le théorème 6.1 pour Φ_1), l'application $t^{-1}\varphi t = \psi$ est une *permutation de* $\mathbf{R}^n$ qui à $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) \in \mathbf{R}^n$ fait correspondre un vecteur

$$(x_{v_1}, x_{v_2}, \ldots, x_{v_n}) \in \mathbf{R}^n$$

où

1/ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une permutation de $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$;

2/ à tout $k \in [2, n]$ tel que $x_k^* > x_{i_k}$ correspond biunivoquement un $k' \in [2, n]$ tel que $x_{v_k'} = x_k^* > x_{i_k} = x_{v_{k'-1}}$.

Nous avons ainsi, en tenant compte de $b(x, x') = 0$ si $x \geqslant x'$

$$\nu(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) = \sum_{k=2}^{n} b(x_{i_k}, x_k^*) = \sum_{k=2}^{n} b(x_{v_{k'-1}}, x_{v_{k'}}) = \xi(x_{v_1}, x_{v_2}, \ldots, x_{v_k}).$$

Il en résulte que pour tout ensemble mesurable $B \in \mathcal{A}_1$, on a

$$\nu^{-1} B = \psi^{-1} \xi^{-1} B .$$

D'où

$$P_x \nu^{-1} B = P_x \psi^{-1} \xi^{-1} B .$$

Le théorème sera ainsi démontré si nous prouvons

$$P_x \psi^{-1} A = P_x A$$

pour tout $A \in \mathcal{A}_n$.

Ce résultat vient de la dépendance symétrique des X_k et du fait que ψ^{-1} est localement une permutation de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

De façon précise, définissons une relation d'équivalence (S) sur les vecteurs de R^n en posant

$$(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) \equiv (x_{i'_1}, x_{i'_2}, \ldots, x_{i'_n}) \mod (S)$$

si et seulement si

$$x_{i_k} < x_{i_l} \text{ (resp. } x_{i_k} = x_{i_l}) \Longleftrightarrow x_{i'_k} < x_{i'_l} \text{ (resp. } x_{i'_k} = x_{i'_l})$$

pour tout couple (k, l) $(1 \leqslant k, l \leqslant n)$.

La définition de la permutation φ (Cf. 8.3) (ou celle de Φ_1, Cf. 6.2) entraîne alors que si

$$(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) \equiv (x_{i'_1}, x_{i'_2}, \ldots, x_{i'_n}) \mod (S)$$

alors

$$\psi^{-1}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) \equiv \psi^{-1}(x_{i'_1}, x_{i'_2}, \ldots, x_{i'_n}) \mod (S) .$$

De là, l'extension de ψ^{-1} à l'ensemble quotient $\mathbf{R}^n/S$ est une permutation de $\mathbf{R}^n/S$ et d'autre part, à toute classe d'équivalence $F \in R^n/S$, correspond une permutation $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ de $[1, n]$ telle que si $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) \in F$, alors

$$\psi^{-1}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) = (x_{i_{\sigma_1}}, x_{i_{\sigma_2}}, \ldots, x_{i_{\sigma_n}})$$

que nous poserons égal à $\sigma(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$.

Les classes d'équivalence F de $\mathbf{R}^n/S$ forment ainsi une partition finie de $\mathbf{R}^n$ en sous-ensembles mesurables. Nous écrirons

$$\mathbf{R}^n = \bigcup_{k \in \text{ensemble fini}} F_k$$

où les F_k sont disjoints deux à deux

et nous désignerons par $\sigma^{(k)}$ la permutation de $\mathbf{R}^n$ coïncidant sur F_k avec la restriction de ψ^{-1} à F_k.

Soit alors $A \in \mathcal{A}_n$.

Nous avons

$$A = \bigcup_k A \cap F_k$$

où les ensembles $A \cap F_k$ sont disjoints deux à deux.

$$\psi^{-1} A = \bigcup_k \psi^{-1}(A \cap F_k) = \bigcup_k \sigma^{(k)}(A \cap F_k) .$$

Les $\sigma^{(k)}(A \cap F_k)$ étant d'une part mesurables et d'autre part disjoints deux à deux,

$$P_x \psi^{-1} A = \sum_k P_x \sigma^{(k)}(A \cap F_k)$$

mais comme la suite $X_1, X_2, \ldots, X_n$ est en dépendance symétrique, $P_x \sigma^{(k)}(A \cap F_k) = P_x(A \cap F_k)$.

D'où

$$P_x \psi^{-1} A = \sum_k P_x (A \cap F_k) = P_x (\bigcup_k A \cap F_k)$$

$$= P_x A .$$

Ce qui achève la démonstration du théorème.

Si dans la démonstration du théorème 9.1, nous remplaçons la bijection Φ_1 par la bijection Φ_2, nous avons alors le résultat

THEOREME 9.1'. - *Sous les mêmes hypothèses que le théorème* 9.1, *les variables aléatoires*

$$\sum_{k=1}^{n-1} b(X_k^*, X_k) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n-1} b(X_{k+1}, X_k)$$

ont même distribution

Nous donnons dans le prochain paragraphe une identité sur les fonctions caractéristiques des variables aléatoires analogue à celle donnée par Spitzer dans la théorie des fluctuations de sommes de variables aléatoires.

9.3. Une identité sur les fonctions caractéristiques des statistiques d'ordre.

Nous introduisons d'abord quelques notations.

Soit $\mathfrak{X}$ un ensemble totalement ordonné. Pour tout mot $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ de $\mathfrak{X}_n^*$ $(n > 0)$ et toute permutation

$$\sigma : k \longrightarrow i_k \quad (1 \leqslant k \leqslant n) \quad \text{de} \quad [1, n] ,$$

nous posons

$$\sigma f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} .$$

Soit encore b une application $b : \mathfrak{X}^2 \longrightarrow \Omega$ telle que $b(x, x') = 0$ si $x \geqslant x'$ (pour l'ordre total dans $\mathfrak{X}$), Ω étant un anneau commutatif (unitaire). Nous posons alors pour tout $f \in \mathfrak{X}_n^*$

$$U\sigma f = b(x_{i_1}, x_{i_2}) + b(x_{i_2}, x_{i_3}) + \ldots + b(x_{i_{n-1}}, x_{i_n})$$

si $n > 1$

et $U\sigma f = 0$ si $n = 1$

Lorsque $\mathfrak{X} = \mathbf{R}$, nous introduisons en outre pour tout $f \in \mathfrak{X}_n^*$ $(n > 0)$,

$$S\sigma f = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Big(\sum_{k'=1}^{k} x_{i_{k'}} \Big)^+ .$$

Soit maintenant τ une permutation de $[1, n]$ donnée comme produit des cycles disjoints

$$\tau = (B_1)\,(B_2) \ldots (B_s) \tag{9.3.1}$$

avec

$$(B_p) = (i_{\Lambda_{p-1}+1}\ i_{\Lambda_{p-1}+2} \ldots\ i_{\Lambda_p}) \tag{9.3.2}$$

$$(\Lambda_o = 0\ ;\ 1 \leqslant p \leqslant s).$$

Nous posons alors

$$B_p f = x_{i_{\Lambda_{p-1}+1}}\ x_{i_{\Lambda_{p-1}+2}}\ \ldots\ x_{i_\Lambda} \in \mathfrak{X}^*,$$

$$D\,B_p f = b(x_{i_{\Lambda_p}}, x_{i_{\Lambda_p}}) \quad \text{si} \quad \Lambda_p = \Lambda_{p-1} + 1$$

$$= b(x_{i_{\Lambda_{p-1}+1}}, x_{i_{\Lambda_{p-1}+2}}) + \ldots + b(x_{i_{\Lambda_p - 1}}, x_{i_{\Lambda_p}}) + b(x_{i_{\Lambda_p}}, x_{i_{\Lambda_{p-1}+1}})$$

si $\Lambda_p > \Lambda_{p-1} + 1$

$$(1 \leqslant p \leqslant s)$$

et enfin

$$V\tau f = D\,B_1 f + D\,B_2 f + \ldots + D\,B_s f .$$

Dans le cas où $\mathfrak{X} = \mathbf{R}$, nous posons enfin

$$T\tau f = \sum_{p=1}^{s} (x_{i_{\Lambda_{p-1}+1}} + x_{i_{\Lambda_{p-1}+2}} + \ldots + x_{i_{\Lambda_p}})^+$$

Nous montrons alors le résultat suivant

THEOREME 9.2.- *Pour tout mot* $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ de $\mathfrak{X}_n^*$ $(n > 1)$ *les ensembles* $\{U\sigma f : \sigma \in \boldsymbol{\sigma}_n\}$ *et* $\{V\tau f : \tau \in \boldsymbol{\sigma}_n\}$ *sont identiques.*

Ce théorème est à rapprocher de celui de Spitzer ([37] théorème 2.2), à savoir

THEOREME 9.3 (Spitzer).- *Pour tout mot* $f = x_1 x_2 \dots x_n$ *de* $\mathfrak{X}_n^*$ $(n \geqslant 1)$ *où* $\mathfrak{X}$ *est la droite réelle* $\mathbf{R}$, *les ensembles* $\{S\sigma f : \sigma \in \boldsymbol{\sigma}_n\}$ *et* $\{T\tau f : \tau \in \boldsymbol{\sigma}_n\}$ *sont identiques.*

Soit $\mathfrak{X}'$ l'ensemble des mots $f = x_1 x_2 \dots x_n$ de $\mathfrak{X}_n^*$ tels que pour des r_k rationnels $(1 \leqslant k \leqslant n)$ on ait

$$r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_n x_n = 0$$

si et seulement si $r_k = 0$ pour tout $k \in [1, n]$.

Spitzer construit alors pour tout $f \in \mathfrak{X}'$ une bijection $\tau_f : \boldsymbol{\sigma}_n \longrightarrow \boldsymbol{\sigma}_n$ telle que pour tout $\sigma \in \boldsymbol{\sigma}_n$ on ait

$$S\sigma f = T\,\tau_f(\sigma) f .$$

Il étend alors ce résultat à tous les mots $f \in \mathfrak{X}_n^*$ par suite de la continuité des fonctions

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow S\sigma f \quad \text{et} \quad x \longrightarrow T\tau f$$

(f étant le mot $f = x_1 x_2 \dots x_n$ de $\mathfrak{X}_n^*$).

Dans le théorème 9.2, nous ne faisons aucune hypothèse topologique sur l'anneau Ω ou sur l'application b (en dehors de $b(x, x') = 0$ si $x \geqslant x'$) et l'argument employé est de nature complètement combinatoire. Nous utilisons les factorisations spéciales introduites dans les chapitres précédents, et en particulier pour la factorisation (spéciale) de Spitzer (Cf. 7.5) nous donnons une nouvelle preuve du théorème 9.3, ne faisant pas intervenir la continuité des fonctions $x \longrightarrow S\sigma f$ et $x \longrightarrow T\tau f$.

En fait, nous montrons

THEOREME 9.4.- *A toute factorisation spéciale* $(\mathfrak{H}, \preceq)$ *de* $\mathfrak{X}^*$ *est associée une famille d'applications* $(\tau_f)_{f \in \mathfrak{X}^*}$ *telle que*

(i) *pour tout* $f \in \mathfrak{X}_n^*$ $(n > 0)$

$$\tau_f : \boldsymbol{\sigma}_n \longrightarrow \boldsymbol{\sigma}_n$$

est une bijection

(ii) *pour tout* $f \in \mathfrak{X}_n^*$ $(n > 0)$ *et* $\sigma \in \boldsymbol{\sigma}_n$

$$U\sigma f = V\,\tau_f(\sigma) f .$$

Lorsque $\mathfrak{X} = \mathbf{R}$ *et que* $(\mathcal{H}, \leqq)$ *est la factorisation (spéciale) de Spitzer, la famille* τ_f *satisfait en plus la relation*

$$S\sigma f = T\ \tau_f(\sigma)\ f$$

$$(f \in \mathfrak{X}_n^*\ ;\ n > 0).$$

Pour la preuve, nous aurons besoin d'un lemme préliminaire (lemme 9.1 ci-dessous) que nous allons démontrer après avoir rappelé quelques notations.

Soit $\mathcal{Y}^*$ le monoïde libre engendré par le produit cartésien $\mathcal{Y} = \mathfrak{X} \times \mathbf{N}$. Si $g = y_1\ y_2 \ldots y_n$ est un mot de $\mathcal{Y}^*$ tel que

$$y_k = (x_k,\ m_k) \quad (x_k \in \mathfrak{X},\ m_k \in \mathbf{N}\ ;\ 1 \leqslant k \leqslant n)$$

nous posons

$$\rho g = x_1\ x_2 \ldots\ x_n \in \mathfrak{X}^* \quad \text{et} \quad m_k = m(k)\ g$$

(ou simplement $m(k)$ s'il n'y a pas risque de confusion $1 \leqslant k \leqslant n$).

Supposons en outre donnée la factorisation spéciale $(\mathcal{H}, \leqq)$ de $\mathfrak{X}^*$. Nous désignerons alors par $\mathcal{H}'$ le sous-ensemble des mots $g \in \mathcal{Y}^*$ tels que

1/ $\rho g = f^q$ où $f \in \mathcal{H}$ et $q > 0$ et tels que

2/ le mot $m(1)g\ m(1+\lambda f)g \ldots m(1+(q-1)\lambda f)g$ est un mot lexicographique standard dans le monoïde libre engendré par $\mathbf{N}$. Nous avons alors

LEMME 9.1.- *Tout mot multilinéaire* g *de* $\mathcal{Y}^*$ *a une factorisation unique* $g_1\ g_2 \ldots g_s$ *telle que*

1/ $g_1,\ g_2, \ldots,\ g_s \in \mathcal{H}'$

2/ *en posant* $\rho g_p = f_p^{q_p}$ *avec* $f_p \in \mathcal{H}$, *on a pour* $1 \leqslant p < s$

- *ou* $f_p \succ f_{p+1}$

- *ou* $f_p = f_{p+1}$ *et* $m(1)g_p > m(1)g_{p+1}$.

D'autre part, toute classe multilinéaire de mots conjugués de $\mathcal{Y}^*$ *contient un et un seul mot de* $\mathcal{H}'$.

PREUVE. - En effet, soit $g = y_1\, y_2 \ldots y_n$ un mot multilinéaire de $\mathcal{Y}^*$.

Posons

$$\rho g = x_1\, x_2 \ldots x_n \quad \text{et} \quad y_k = (x_k\,,\, m_k) \quad m_k \in \mathbf{N} \quad (1 \leqslant k \leqslant n)\,.$$

Soit $f_1^{q'_1} f_2^{q'_2} \ldots f_v^{q'_v}$ la factorisation (unique) de ρg telle que

$$f_1\,,\, f_2\,,\ldots,\, f_v \in \mathcal{H}\,;\; f_1 \succ f_2 \succ \ldots \succ f_v \quad \text{et} \quad q'_1,\, q'_2,\ldots\, q'_v \geqslant 1\,.$$

Posons

$$K_u = q'_1.\,\lambda f_1 + q'_2.\,\lambda f_2 + \ldots + q'_u\,.\,\lambda f_u$$

et

$$g'_u = y_{K_{u-1}+1}\, y_{K_{u-1}+2} \ldots\, y_{K_u} \qquad (1 \leqslant u \leqslant v\;;\; K_o = 0)\,.$$

Si tous les q'_u sont égaux à 1, on pose $g_u = g'_u$ $(1 \leqslant u \leqslant v)$ et $v = s$ et $g_1\, g_2 \ldots g_s$ est la factorisation unique de g satisfaisant aux conditions 1/ et 2/ de l'énoncé.

Si on a $q'_u > 1$ pour un certain $u \in [1\,,\, v]$, nous considérons alors la suite des entiers (distincts car g est multilinéaire).

$$m(K_{u-1}+1)\,,\; m(K_{u-1}+1+\lambda f_u)\,,\ldots,\; m(K_{u-1}+1+(q'_u-1)\,\lambda f_u)\,.$$

Dans le monoïde libre engendré par $\mathbf{N}$, le mot

$$m(K_{u-1}+1) \quad m(K_{u-1}+1+\lambda f_u) \ldots \quad m(K_{u-1}+1+(q'_u-1)\lambda f_u)$$

admet une factorisation unique en mots lexicographiques standards ; nous pouvons ainsi écrire

$$g'_u = g''_{u,1}\; g''_{u,2} \ldots\; g''_{u,a_u}$$

où $\rho\, g''_{u,c} = f_u^{q''_{u,c}}$

$$f_u \in \mathcal{H}$$

et où

$$m(1)g''_{u,c} \quad m(1+\lambda f_u)g''_{u,c} \quad \ldots \quad m(1+(q''_{u,c}-1)\lambda f_u)g''_{u,c}$$

est un mot lexicographique standard dans le monoïde libre engendré par $\mathbf{N}$ $(1 \leqslant c \leqslant a_u)$.

Si $a_u > 1$, on a en outre

$$m(1)g''_{u,1} > m(1)g''_{u,2} > \ldots > m(1)g''_{u,a_u} .$$

D'autre part, si $v > 1$, alors on a pour tout u $(1 \leqslant u \leqslant v)$

$$\rho g''_{u,a_u} = f_u \succ f_{u+1} = \rho g''_{u+1,1} .$$

Ce qui démontre la première partie du lemme.

Pour la seconde partie du lemme, soit g' un mot multilinéaire de $\mathfrak{Y}^*$. Alors $\rho g' = f'^q$ où f' est primitif et q maximal > 0 . Dans la classe de f' il existe un et un seul mot $f \in \mathfrak{H}$.

D'autre part, parmi tous les mots g de la classe de g' tels que $\rho g = f^q$, il y en a un et un seul qui soit tel que le mot (qui a toutes ses lettres distinctes puisque g' est multilinéaire)

$$m(1)\ g \quad m(1+\lambda f)\ g \quad \ldots \quad m(1+(q-1)\lambda f)\ g$$

soit un mot lexicographique standard.

Ce qui achève la démonstration du lemme.

La démonstration du théorème 9.4 consiste alors à associer à tout $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ de $\mathfrak{X}_n^*$ $(n > 0)$ un mot $\rho' f = y_1 y_2 \ldots y_n$ de $\mathfrak{Y}^*$ en posant

$$y_k = (x_k , \gamma_k f) \qquad (1 \leqslant k \leqslant n) ,$$

puis à définir une certaine bijection entre les $n!$ permutations de $\boldsymbol{\sigma}_n$ et les $n!$ mots de la classe abélienne de $\rho' f$ (puisque ce mot est multilinéaire dans $\mathfrak{Y}^*$) .

De façon précise, supposons que $\tau \in \boldsymbol{\sigma}_n$ est donné comme produit des cycles disjoints

$$\tau = (B_1)\ (B_2) \ \ldots \ (B_s)$$

$$(B_p) = (i_{\Lambda_{p-1}+1}\ i_{\Lambda_{p-1}+2} \ \ldots \ i_{\Lambda_p})$$

$$(1 \leqslant p \leqslant s \ ; \ \Lambda_0 = 0) .$$

Considérons les mots

$$B_\rho \rho' f = y_{i_{\Lambda_{\rho-1}+1}} y_{i_{\Lambda_{\rho-1}+2}} \cdots y_{i_{\Lambda_\rho}} .$$

D'après le lemme 9.1, il n'y a qu'un et qu'un seul mot de $\mathcal{H}'$ conjugué à $B_\rho \rho' f$. Comme chacun des cycles (B_ρ) n'est défini qu'à une permutation circulaire près de ses éléments, on peut le réécrire d'une seule façon

$$(B_\rho) = (i_{K_{\rho,1}} i_{K_{\rho,2}} \cdots i_{K_{\rho,\lambda_\rho}})$$

où $(K_{\rho,1}, K_{\rho,2}, \ldots, K_{\rho,\lambda_\rho})$ est une permutation circulaire de

$$(\Lambda_{\rho-1} + 1 , \Lambda_{\rho-1} + 2 , \ldots , \Lambda_\rho)$$

et où le mot

$$g_\rho = y_{i_{K_{\rho,1}}} y_{i_{K_{\rho,2}}} \cdots y_{i_{K_{\rho,\lambda_\rho}}} \in \mathcal{H}' .$$

Posons

$$\rho g_\rho = f_\rho^{q_\rho} \qquad \text{avec} \qquad f_\rho \in \mathcal{H} .$$

La permutation τ n'étant définie qu'à une permutation près de ses cycles, il existe une et une seule permutation $(p_1, p_2, \ldots, p_s)$ de $[1 , s]$ telle que l'on ait pour tout couple (l , l') $(1 \leqslant l < l' \leqslant s)$

$$f_{p_l} \geqq f_{p_{l'}},$$

et si $f_{p_l} = f_{p_{l'}}$, alors $m(1)g_{p_l} > m(1)g_{p_{l'}}$.

Posons

$$g = g_{p_1} g_{p_2} \cdots g_{p_s} = y_{i'_1} y_{i'_2} \cdots y_{i'_s} .$$

Nous faisons alors correspondre à τ la permutation

$$\sigma_f(\tau) : k \longrightarrow i'_k \qquad (1 \leqslant k \leqslant n) .$$

Réciproquement, étant donné $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, soit

$$\sigma f = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} \qquad \text{et} \qquad \sigma\rho' f = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n} .$$

Le mot $\sigma\rho' f$, multilinéaire dans $\mathcal{Y}^*$ a d'après le lemme 9.1 une factorisation unique $g_1 g_2 \cdots g_s$ satisfaisant les conditions 1/ et 2/ du lemme 9.1.

Nous posons alors

$$\tau_f(\sigma) = (i_1 i_2 \dots i_{\Lambda_1})(i_{\Lambda_1+1} i_{\Lambda_1+2} \dots i_{\Lambda_2}) \dots (i_{\Lambda_{s-1}+1} i_{\Lambda_{s-1}+2} \dots i_{\Lambda_s})$$

où $\Lambda_p = \lambda g_1 + \lambda g_2 + \dots + \lambda g_p \quad (1 \leqslant p \leqslant s \; ; \; \Lambda_o = 0)$.

Par construction, nous avons évidemment

$$\sigma_f [\tau_f (\sigma)] = \sigma$$

Ce qui établit la première partie du théorème 9.4.

De plus, puisque $(\mathcal{H}, \preceq)$ est spécial,

$$x_{i_{\Lambda_p}} = \mathbf{L} \rho g_p \geqslant \mathbf{P} \rho g_p = x_{i_{\Lambda_{p-1}+1}} \qquad (1 \leqslant p \leqslant s) \qquad (9.3.3)$$

et pour $1 \leqslant p < s$, puisqu'en posant $\rho g_p = f_p^{q_p}$ avec $f_p \in \mathcal{H}$, on a $f_p \succeq f_{p+1}$, alors

$$x_{i_{\Lambda_p}} = \mathbf{L} \rho g_p \geqslant \mathbf{P} \rho g_{p+1} = x_{i_{\Lambda_p+1}} .$$

D'où l'on a

$$b (x_{i_{\Lambda_p}}, x_{i_{\Lambda_{p-1}+1}}) = 0$$

et

$$b (x_{i_{\Lambda_p}}, x_{i_{\Lambda_p+1}}) = 0 .$$

Par suite, les deux quantités

$$U\sigma f = b(x_{i_1}, x_{i_2}) + b(x_{i_2}, x_{i_3}) + \dots + b(x_{i_{n-1}}, x_{i_n})$$

et

$$V\tau_f(\sigma) f = \sum_{p=1}^{s} (b(x_{i_{\Lambda_{p-1}+1}}, x_{i_{\Lambda_{p-1}+2}}) + \dots + b(x_{i_{\Lambda_{p-1}}}, x_{i_{\Lambda_p}}) + b(x_{i_{\Lambda_p}}, x_{i_{\Lambda_{p-1}+1}}))$$

sont égales.

Lorsque $\mathfrak{X} = \mathbf{R}$ et que $(\mathcal{H}, \preceq)$ est la factorisation spéciale de Spitzer, on a en outre

$$S\sigma f = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Big(\sum_{k'=1}^{k} x_{i_{k'}} \Big)^+ = \sum_{p=1}^{s} (x_{i_{\Lambda_{p-1}+1}} + x_{i_{\Lambda_{p-1}+2}} + \dots + x_{i_{\Lambda_p}})^+ = T\tau_f(\sigma) f ,$$

puisque si $h = x_{v_1} x_{v_2} \dots x_{v_r}$ est un mot de $\mathcal{H}$, on a

$$\frac{\sum_{k=1}^{r} x_{v_k}}{r} \geqslant \frac{\sum_{k=1}^{t} x_{v_k}}{t} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant t \leqslant r$$

donc a fortiori $\sum_{k=1}^{r} x_{v_k} \geqslant \sum_{k=1}^{t} x_{v_k}$ pour $1 \leqslant t \leqslant r$.

Ceci achève la démonstration du théorème 9.4. Les deux théorèmes 9.2 et 9.3 s'en déduisent alors immédiatement.

Soit maintenant $X_1, X_2, \ldots X_n$ une suite de n variables aléatoires en dépendance symétrique. Soit τ une permutation de $\mathfrak{S}_n$ donnée par le produit des cycles disjoints.

$$\tau = (B_1)\,(B_2)\,\ldots\,(B_s)\,.$$

où

$$(B_\rho) = (i_{\Lambda_{\rho-1}+1}\,,\; i_{\Lambda_{\rho-1}+2}\,,\ldots,\; i_{\Lambda_\rho})\,.$$

Posons

$$V\tau X = \sum_{\rho=1}^{s} (b(X_{i_{\Lambda_{\rho-1}+1}}, X_{i_{\Lambda_{\rho-1}+2}}) + \ldots + b(X_{i_{\Lambda_{\rho-1}}}, X_{i_{\Lambda_\rho}}) + b(X_{i_{\Lambda_\rho}}, X_{i_{\Lambda_{\rho-1}+1}}))\,.$$

Enfin, pour $\sigma : k \longrightarrow \sigma_k \quad (1 \leqslant k \leqslant n)$, nous posons

$$U\sigma X = \sum_{k=1}^{n-1} b(X_{\sigma_k}, X_{\sigma_{k+1}})\,.$$

Suivant la même méthode que Spitzer ([38] p. 329) il résulte de la dépendance symétrique des X_k et du théorème 9.2, que pour toute fonction mesurable à variables complexes h(x), on a

$$Eh[U X] = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} Eh[U\sigma X] = \frac{1}{n!} \sum_{\tau} Eh[V\tau X]\,. \qquad (9.3.5)$$

Supposons maintenant que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et équidistribuées, et posons pour $h(x) = \exp(i\lambda x)$ où $\mathrm{Im}(\lambda) \geqslant 0$,

$$\Phi_n(\lambda) \begin{cases} = 1 \quad \text{si} \quad n = 1 \\ = E \exp\{i\lambda (b(X_1, X_2) + \ldots + b(X_{n-1}, X_n))\} \end{cases}$$

et

$$\psi_k(\lambda) \begin{cases} = 1 & \text{si} \quad k = 1 \\ = E \exp\{i\lambda(b(X_1, X_2) + \ldots + b(X_{k-1}, X_k) + b(X_k, X_1))\}. \end{cases}$$

Si la permutation τ est le produit de k_l cycles de longueur l $(1 \leqslant l \leqslant n \ ; \ k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n)$, alors

$$Eh\,[V_\tau X] = \psi_1(\lambda)^{k_1}\ \psi_2(\lambda)^{k_2}\ \ldots\ \psi_n(\lambda)^{k_n}\ .$$

Par suite, il résulte de (9.3.5)

$$n!\ \Phi_n(\lambda) = \sum C(k_1, k_2, \ldots, k_n)\ \psi_1(\lambda)^{k_1}\ \psi_2(\lambda)^{k_2}\ \ldots\ \psi_n(\lambda)^{k_n} \quad (9.3.6)$$

où $C(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ est le nombre de permutations de σ_n qui sont produits de k_l cycles de longueur l $(1 \leqslant l \leqslant n)$.

Mais d'après Riordan ([33] p. 68), toute fonction génératrice de la forme

$$C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \sum C(k_1, k_2, \ldots, k_n)\ t_1^{k_1}\ t_2^{k_2}\ \ldots\ t_n^{k_n}$$

satisfait à la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)\frac{u^n}{n!} = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} u^k \frac{t_k}{k}\right].$$

Si maintenant u est une variable réelle et les

$$C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) \ / \ n!$$

des quantités complexes bornées en module par une même valeur, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)\ \frac{u^n}{n!}$ converge pour tout $|u| < 1$.

En particulier, en posant

$$C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) = n!\ \Phi_n(\lambda) \qquad n \geqslant 0$$

et

$$t_k = \psi_k(\lambda) \qquad k \geqslant 1\ ,$$

nous avons

$$\left|\frac{n!\ \Phi_n(\lambda)}{n!}\right| < 1\ .$$

D'où l'identité

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\lambda)\, u^n = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(\lambda)}{k}\, u^k\right]$$

valable pour $\mathbf{Im}(\lambda) \geqslant 0$ et $|u| < 1$. C'est l'identité de Spitzer, pour un nouveau couple de fonctions caractéristiques. Résumons ces résultats dans un théorème,

THEOREME 9.5. - *Soit* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées ;* $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ *la statistique d'ordre de* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *pour tout* $n > 1$ *et* $b : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction mesurable telle que* $b(x, x') = 0$ *pour* $x \geqslant x'$, *alors pour* $n > 1$

$$E \exp\left[i\lambda \sum_{k=2}^{n} b(X_k, X_k^*)\right] = E \exp\left[i\lambda \sum_{k=2}^{n} b(X_{k-1}, X_k)\right].$$

Si $\Phi_n(\lambda)$ *est la valeur commune de ces deux quantités*

$$(\Phi_0(\lambda) = \Phi_1(\lambda) = 1)$$

et $\psi_k(\lambda)$ *la fonction caractéristique de la statistique*

$$b(X_1, X_2) + \ldots + b(X_{k-1}, X_k) + b(X_k, X_1),$$

l'identité de Spitzer est satisfaite pour la famille

$$\{\Phi_n(\lambda), \psi_k(\lambda)\} \quad (n \geqslant 0, \ k > 1)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(\lambda)\, u^n = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(\lambda)}{k}\, u^k\right]$$

$$(|u| < 1 \quad \mathbf{Im}(\lambda) \geqslant 0).$$

9.4. Quelques applications probabilistes des factorisations spéciales.

Donnons, pour finir, une interprétation probabiliste simple des formules de Witt (Cf. proposition 5.1).

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_q$ q nombres réels $(q > 0)$ rationnellement indépendants (c'est-à-dire que pour tous $r_1, r_2, \ldots, r_q$ rationnels $\sum_{i=1}^{q} r_i x_i = 0 \Longrightarrow r_i = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant q)$) et considérons une

variable aléatoire discrète X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_q$ avec la probabilité $1/q$.

Soit alors $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de n variables aléatoires indépendantes et ayant la même loi que X.

Posons

$$S_k = X_1 + \ldots + X_k \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Nous avons

PROPOSITION 9.1.- *La probabilité que la ligne polygonale*

$$(0\ ,\ 0)\ (1\ ,\ S_1)\ (1\ ,\ S_2)\ \ldots\ (n\ ,\ S_n)$$

soit entièrement située au-dessous de la corde $(0\ ,\ 0)\ (n\ ,\ S_n)$ *est donnée par*

$$(1/n) \sum_{d \mid n} \mu(n/d)/q^{n-d}$$

ou encore

$$P_r \left[\bigcap_{k=1}^{n-1} S_k/k < S_n/n \right] = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(n/d)/q^{n-d}$$

où μ *désigne la fonction de Möbius.*

PREUVE.- Soit Q l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$ et Q_n l'ensemble des mots du monoïde libre Q^* engendré par Q de longueur n. Dans la proposition 5.1, nous avons montré que pour toute factorisation de Schützenberger de type b, soit $(\mathcal{H}, \leq)$, le nombre des mots de longueur n et ne contenant que des lettres d'un sous-ensemble de cardinalité q était donné par la première formule de Witt de paramètres n et q.

Pour la factorisation spéciale de Spitzer (cf. § 7.5), les mots $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$ de $\mathcal{H}$ ne contenant que des lettres de Q vérifient alors

$$\frac{x_{i_1}}{1}\ ,\ \frac{x_{i_1} + x_{i_2}}{2}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_{n-1}}}{n-1} < \frac{x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_n}}{n}$$

(puisque les x_k sont rationnellement indépendants) et sont les seuls qui aient cette propriété.

D'où le résultat, d'après la formule de Witt et le fait que l'ensemble des mots de Q de longueur n a pour cardinalité q^n.

Une interprétation analogue pourrait être donnée de la seconde formule de Witt en termes de cheminement aléatoire dans le plan.

10. Applications combinatoires. Formule de Dixon

10.1. Introduction.

Nous utilisons maintenant les résultats du chapitre 4 pour démontrer ou redémontrer certaines identités combinatoires contenant des coefficients binomiaux. En fait, dans tous les cas étudiés, nous allons considérer deux sous-ensembles de mots d'un monoïde libre et établir entre eux une bijection qui conserve une certaine propriété. Pour obtenir les identités combinatoires, tout revient alors à compter les éléments de chacun des ensembles (finis !). Ces méthodes permettent ainsi de donner une interprétation aux coefficients binomiaux apparaissant dans ces formules : nous montrons explicitement quels sont les objets qui sont comptés.

Une première identité que nous étudierons est celle de Dixon [9]

$$\sum_{k=0}^{2p} (-1)^k \binom{2p}{k}^3 = (-1)^p \frac{(3p)!}{(p!)^3} \qquad (10.1.1.)$$

Il en existe de nombreuses démonstrations depuis celle de Richmond [32] jusqu'aux plus récentes : celles de Ljunggren [23], Staver [39] et Nanjundiah [29].

Mac Mahon ([27] p. 121) en donne une démonstration élégante en appliquant son "Master Theorem" (Voir aussi Hall [18] p.50).

Toutes ces démonstrations utilisent des techniques d'algèbre commutative (changement de variables dans les fonctions génératrices, opérations élémentaires sur les coefficients binomiaux,...) et naturellement ne nous fournissent aucune indication sur l'existence de bijections d'ensembles, nous permettant d'expliciter ce résultat.

Dans la prochaine section, nous établissons une correspondance biunivoque : $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ entre deux sous-ensembles $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ d'un

monoïde libre engendré par un ensemble $\mathcal{X}$ réduit à trois éléments ($\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$) (proposition 10.1). Prenant alors des mots abéliens h d'un certain type et considérant la bijection induite : $\alpha^{-1} h \cap \mathcal{V} \longrightarrow \alpha^{-1} h \cap \mathcal{W}$, nous déduisons la formule de Dixon avec h défini par $hx_1 = hx_2 = hx_3 = 2p$ $(p > 0)$ (section 10.3) ; puis avec h défini par $hx_1 = b + c$, $hx_2 = c + a$ et $hx_3 = a + b$ où a, b et c sont des entiers non négatifs, nous établissons la formule de Fjeldstad (section 10.4)

$$\sum (-1)^k \binom{b+c}{c+k} \binom{c+a}{a+k} \binom{a+b}{b+k} = \frac{(a+b+c)!}{a!\ b!\ c!} \qquad (10.4.2)$$

La façon d'établir ces identités est originale et la bijection $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$, définie ci-dessous, leur donne une interprétation en terme de sous-ensembles de mots d'un monoïde libre.

10.2. Un résultat combinatoire.

Considérons un ensemble ordonné $\mathcal{X}$, réduit à trois éléments x_1, x_2, x_3 $(x_1 < x_2 < x_3)$. Nous rappelons que pour tout couple (x_t, x_u) $(t, u = 1, 2, 3)$ et tout mot $f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$ de $\mathcal{X}^*$, $\nu_{x_t, x_u} f$ désigne le nombre d'indices k tels que

$$x_{i_k} = x_t \quad \text{et} \quad x_{j_k} = x_u \quad (x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_r} = \beta f$$

étant toujours le mot non décroissant de la classe abélienne de f).

Notons par $\mathcal{V}$ le sous-ensemble des mots $f \in \mathcal{X}^*$ tels que

$$\nu_{x_u x_u} f = 0 \quad \text{pour tout} \quad u = 1, 2, 3 \qquad (10.2.1)$$

et par $\mathcal{W}$ le sous-monoïde libre de $\mathcal{X}^*$ engendré par l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des mots

$$x_1 x_2,\ x_1 x_3,\ x_2 x_3,\ x_1 x_2 x_3,\ x_1 x_3 x_2. \qquad (10.2.2)$$

c'est-à-dire les cinq mots multilinéaires de $\mathcal{X}^*$ minimum dans leurs classes de conjugués (par rapport à l'ordre lexicographique) et non réduits à une seule lettre.

Soit $\theta : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}^*$ une bijection.

Nous rappelons que nous avons défini dans le chapitre 4 une surjection $\rho : \mathcal{Y}^* \longrightarrow \mathcal{X}^*$ (ses propriétés sont décrites dans la proposition 4.2) et que dans chaque classe $\rho^{-1} f$ $(f \in \mathcal{X}^*)$, nous avons distingué un élément Cf dit élément canonique. Sa définition

(voir définition 4.1) dépend d'un sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathcal{Y}^*$ et nous prendrons ici $\mathcal{S} = \theta^{-1}\mathcal{S}_0$ où $\mathcal{S}_0$ est le sous-ensemble de $\mathcal{X}^*$ des mots multilinéaires minimum dans leurs classes de conjugués, c'est-à-dire

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_1 \cup \{x_1 , x_2 , x_3\} .$$

Par commodité, nous poserons pour $f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} \in \mathcal{X}^*$, $\theta^{-1} f = [x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}]$. Nous montrons d'abord

PROPOSITION 10.1. - $\theta C : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ *établit une application bijective telle que*

(i) $\alpha\theta Cf = \alpha f$ *et*

(ii) *pour tout couple* $\{(x_t , x_u) : 1 \leqslant t < u \leqslant 3\}$

$$\nu_{x_t , x_u} f = \xi_{x_t , x_u} \theta Cf . \qquad (10.2.3)$$

PREUVE. - (i) est satisfait d'après les propriétés de la fonction C (proposition 4.4). Soit ensuite $f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} \in \mathcal{V}$ et

$$\beta f = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_r} .$$

D'après la proposition 4.2, si $g = y_{l_1} y_{l_2} \dots y_{l_s}$ est un mot de $\rho^{-1} f$, aucun des mots θy_{l_p} $(1 \leqslant p \leqslant s)$ n'est réduit à une seule lettre, car autrement il existerait un indice $k \in [1 , r]$ pour lequel $x_{i_k} = x_{j_k}$; ce qui contredirait $f \in \mathcal{V}$.

Réciproquement, si le mot $g = y_{l_1} y_{l_2} \dots y_{l_s} \in \mathcal{Y}^*$ est tel que tous les mots $\theta y_{l_1} , \theta y_{l_2} , \dots , \theta y_{l_s}$ sont multilinéaires et non réduits à une seule lettre, alors il est une représentation en cycles (multilinéaires) d'un mot $f \in \mathcal{V}$. Ainsi la restriction de ρ à $\mathcal{S}'^*$ où $\mathcal{S}' = \theta^{-1}\mathcal{S}_1$ est une surjection de $\mathcal{S}'^*$ sur $\mathcal{V}$.

D'autre part, les mots de $\mathcal{S}_1$ sont tous non disjoints deux à deux. Il résulte alors, toujours de la proposition 4.2, que la classe $\rho^{-1} f \cap \mathcal{S}'^*$ est réduite à un seul élément. Comme l'élément canonique Cf appartient à cette classe, d'après la définition 4.1, c'est donc que l'on a

$$\rho^{-1} f \cap \mathcal{S}'^* = \{Cf\} \qquad f \in \mathcal{V} \qquad (10.2.4)$$

et puisque $\rho : \mathcal{S}'^* \longrightarrow \mathcal{V}$ est une surjection,

$$C : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{S}'^{*} \quad \text{est bijectif.} \tag{10.2.5}$$

Enfin, tout mot $f' \in \mathcal{W}$ a une et *une seule* factorisation $f_1 f_2 \ldots f_s$ où $f_1, f_2, \ldots, f_s \in \mathcal{S}_1$; ce qui revient encore à dire que $\theta^{-1} : \mathcal{S}'^{*} \longrightarrow \mathcal{W}$ est bijectif. Comparant avec (10.2.5),

$$\theta C : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} \tag{10.2.6}$$

est alors une bijection.

Soit $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \in \mathcal{V}$ et $\beta f = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r}$; nous posons

$$Cf = y_{l_1} y_{l_2} \ldots y_{l_s}$$

avec

$$\theta y_{l_p} = x_{v_{K_{p-1}+1}} x_{v_{K_{p-1}+2}} \ldots x_{v_{K_p}} \quad (1 \leqslant p \leqslant s \ ; \ K_o = 0).$$

Alors les indices k pour lesquels le facteur $x_{v_k} x_{v_{k+1}}$ est égal à $x_1 x_2$, $x_1 x_3$, ou $x_2 x_3$ est nécessairement différent de K_p pour tout $p \in [1, s]$, puisque les mots de $\mathcal{S}_1$ ont x_2 ou x_3 pour dernière lettre et x_1 ou x_2 comme première lettre. On a de même

$$(x_{v_{K_p}}, x_{v_{K_{p-1}+1}}) \neq (x_1, x_2), (x_1, x_3) \quad \text{et} \quad (x_2, x_3)$$

pour tout $p \in [1, s]$.

Il résulte alors de la proposition 4.2 qu'à tout $k \in [1, r]$ tel que $x_{i_k} = x_t < x_u = x_{j_k}$ correspond biunivoquement un indice $k' \in [1, r]$ tel que

$$x_{v_{k'-1}} = x_t < x_u = x_{v_{k'}} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant u < t \leqslant 3 \ ;$$

d'où la relation (10.2.3).

Illustrons cette proposition 10.1 par un exemple.

EXEMPLE. - Soit $f = x_2 x_3 x_3 x_2 x_1 x_3 x_1 x_3 x_2 x_2 x_1 x_1$ un mot de $\mathcal{X}^{*}$. Le mot non décroissant βf s'écrit $\beta f = x_1^4 x_2^4 x_3^4$. Pour déterminer le mot canonique Cf, nous cherchons d'abord une représentation en cycles g du mot f, selon la méthode du chapitre 4. Soit

$$g = [x_1 x_2] [x_2 x_3 x_1 x_2 x_3 x_1 x_3 x_2 x_1 x_3].$$

En appliquant à ce mot l'opérateur δ_2^3 (voir lemme 4.3) nous obtenons une représentation en cycles multilinéaires du mot $f\ [x_1\ x_2]\ [x_2\ x_3]\ [x_1\ x_2\ x_3]\ [x_1\ x_3]\ [x_2\ x_1\ x_3]$.

En prenant à l'intérieur de chaque crochet le mot minimum dans sa classe de conjugués, nous avons le mot canonique

$$Cf = [x_1\ x_2]\ [x_2\ x_3]\ [x_1\ x_2\ x_3]\ [x_1\ x_3]\ [x_1\ x_3\ x_2]$$

Par suite, $\theta Cf = x_1\ x_2\ x_2\ x_3\ x_1\ x_2\ x_3\ x_1\ x_3\ x_1\ x_3\ x_2$.

Nous pouvons remarquer aussi que

$$\nu_{x_1,x_2} f = 2 = \xi_{x_1,x_2} \theta Cf$$

$$\nu_{x_1,x_3} f = 2 = \xi_{x_1,x_3} \theta Cf$$

$$\nu_{x_2,x_3} f = 2 = \xi_{x_2,x_3} \theta Cf .$$

Posons pour $f \in \mathfrak{X}^*$

$$\nu f = \nu_{x_1,x_2} f + \nu_{x_1,x_3} f + \nu_{x_2,x_3} f$$

et (10.2.7)

$$\xi f = \xi_{x_1,x_2} f + \xi_{x_1,x_3} f + \xi_{x_2,x_3} f .$$

Si z est une variable réelle ou complexe, nous avons alors pour tout $h \in \bar{\mathfrak{X}}^*$

$$\sum\{z^{\nu f} : f \in \alpha^{-1} h \cap \mathcal{V}\} = \sum\{z^{\xi f} : f \in \alpha^{-1} h \cap \mathcal{W}\} \quad (10.2.8)$$

Les deux membres de cette équation étant pour tout $h \in \bar{\mathfrak{X}}^*$ des polynomes en z.

C'est cette relation (10.2.8) qui va nous fournir les identités combinatoires. Tout va revenir, pour des h particuliers, à compter combien de mots f de la classe $\alpha^{-1} h \cap \mathcal{V}$ (resp. $\alpha^{-1} h \cap \mathcal{W}$) vérifient $\nu f = k$ (resp. $\xi f = k$) où k est un certain entier.

Ecrivons d'abord quelques relations simples satisfaites pour des mots $f \in \mathcal{V}$ et $f \in \mathcal{W}$. Soit h un élément de $\bar{\mathfrak{X}}^*$ défini par

$$hx_1 = p_1 , \quad hx_2 = p_2 , \quad hx_3 = p_3 .$$

Par définition des fonctions ν_{x_t,x_u} nous avons pour $f \in \alpha^{-1} h \cap \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} \nu_{x_1,x_2} f + \nu_{x_1,x_3} f &= p_1 = \nu_{x_2,x_1} f + \nu_{x_3,x_1} f \\ \nu_{x_2,x_3} f + \nu_{x_2,x_1} f &= p_2 = \nu_{x_1,x_2} f + \nu_{x_3,x_2} f \\ \nu_{x_3,x_1} f + \nu_{x_3,x_2} f &= p_3 = \nu_{x_1,x_3} f + \nu_{x_2,x_3} f \end{aligned} \qquad (10.2.9)$$

D'autre part, comme tout mot $f \in \mathfrak{W}$ a une et *une seule* factorisation $f_1 f_2 \dots f_s$ où $f_1, f_2, \dots, f_s \in \mathfrak{S}_1$, nous pouvons poser, pour tout $x_{u_1} \dots x_{u_r} \in \mathfrak{S}_1$

$$n_{u_1 \dots u_r} f = \text{nombre d'indices } q \text{ tels que } f_q = x_{u_1} \dots x_{u_r}$$

$$(1 \leqslant q \leqslant s) .$$

Si f est élément de $\mathfrak{W} \cap \alpha^{-1} h$, nous avons alors

$$\begin{aligned} n_{123} f + n_{132} f + n_{12} f + n_{13} f &= p_1 \\ n_{123} f + n_{132} f + n_{12} f + n_{23} f &= p_2 \\ n_{123} f + n_{132} f + n_{13} f + n_{23} f &= p_2 \end{aligned} \qquad (10.2.10)$$

et

$$\xi f = n_{12} f + n_{13} f + n_{23} f + n_{132} f + 2 . n_{123} f \qquad (10.2.11)$$

Nous allons maintenant utiliser ces relations.

10.3. L'identite de Dixon.

Posons $p_1 = p_2 = p_3 = 2p$ où p est un entier > 0. Nous tirons des relations (10.2.9), en posant $\nu_{x_1,x_2} f = k$

$$\nu_{x_3,x_1} f = \nu_{x_1,x_2} f = \nu_{x_2,x_3} f = k$$

et (10.2.11)

$$\nu_{x_1,x_3} f = \nu_{x_2,x_1} f = \nu_{x_3,x_2} f = 2p - k$$

$$(0 \leqslant k \leqslant 2p) .$$

Par suite, le nombre νf est égal à

$$\nu f = \nu_{x_1,x_2} f + \nu_{x_1,x_3} f + \nu_{x_2,x_3} f = 2p + k$$

Le nombre de mots f de $\mathfrak{V} \cap \alpha^{-1} h$ tels que $\nu f = 2p + k$ $(0 \leqslant k \leqslant 2p)$ est alors égal à

$$\binom{2p}{k}^3$$

puisque ces mots f doivent avoir exactement k fois la lettre x_2 dans les $2p$ premières positions, k fois la lettre x_3 dans les $2p$ suivantes et k fois la lettre x_1 dans les $2p$ dernières, d'après les relations (10.3.1).

Nous pouvons ainsi écrire

$$\sum \{ z^{\nu f} : f \in \alpha^{-1} h \cap \mathfrak{V} \} = z^{2p} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k}^3 z^k \qquad (10.3.2)$$

D'autre part, si f est un élément de $\alpha^{-1} h \cap \mathfrak{W}$ nous tirons des relations (10.2.10) en posant $n_{12} f = n$,

$$n_{12} f = n_{13} f = n_{23} f = n \qquad (10.3.3)$$

et

$$n_{123} f + n_{123} f = 2(p-n)$$

$$(0 \leqslant n \leqslant p) .$$

En posant $n_{132} f = k$, la relation (10.2.11) nous donne alors

$$\xi f = 4p - n - k \quad (0 \leqslant n \leqslant p \; ; \; 0 \leqslant k \leqslant 2(p-n)) . \qquad (10.3.4)$$

Un mot $f \in \mathfrak{W} \cap \alpha^{-1} h$ tel que $n_{12} f = n$ a exactement $3n + 2(p-n) = 2p + n$ mots de $\mathfrak{S}_1$ dans sa factorisation (en mots de $\mathfrak{S}_1$), dont n égaux respectivement à $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ et $x_2 x_3$. Le nombre de mots $f \in \mathfrak{W} \cap \alpha^{-1} h$ tels que $n_{12} f = n$ et $n_{132} f = k$ est alors égal à

$$\frac{(2p+n)!}{(n!)^3 \, k! \, (2p-2n-k)!} .$$

Par suite, utilisant (10.3.4), nous avons

$$\sum \{ z^{\xi f} : f \in \alpha^{-1} h \cap \mathfrak{W} \} = \sum_{n=0}^{p} \sum_{k=0}^{2(p-n)} \frac{(2p+n)!}{(n!)^3 \, k! \, (2p-2n-k)!} z^{4p-n-k} \qquad (10.3.5)$$

qui peut encore s'écrire

$$\sum \{ z^{\xi f} : f \in \alpha^{-1} h \cap \mathfrak{W} \} = z^{2p} \sum_{n=0}^{p} \frac{(2p+n)!}{(n!)^3 \, (2p-2n)!} z^n (z+1)^{2(p-n)} \qquad (10.3.6)$$

D'où en comparant avec (10.3.2), la relation

$$\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k}^3 z^k = \sum_{n=0}^{p} \frac{(2p+n)!}{(n!)^3\,(2p-2n)!}\, z^n\,(z+1)^{2(p-n)} \qquad (10.3.7)$$

Pour $z = 1$, nous avons la relation déjà donnée par Mac Mahon ([27] p. 122)

$$\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k}^3 = \sum_{n=0}^{p} \frac{(2p+n)!}{(n!)^3\,(2p-2n)!}\, 2^{2(p-n)}$$

et pour $z = -1$, la formule de Dixon

$$\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k}^3 (-1)^k = (-1)^p\, \frac{(3p)!}{(p!)^3}.$$

10.4. L'identité de Fjeldstad.

Good [17] démontre en utilisant le "Master Theorem" de Mac Mahon une identité introduite par Fjeldstad [11] soit

$$\sum_k (-1)^k \binom{b+c}{c+k} \binom{c+a}{a+k} \binom{a+b}{b+k} = \frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!} \qquad (10.4.1)$$

où a, b et c sont des entiers non négatifs et où la somme est étendue à tous les k pour lesquels le produit des trois coefficients binomiaux est différent de 0.

Soit donc $h \in \bar{\mathfrak{X}}^*$ défini par $hx_1 = b+c$, $hx_2 = c+a$ et $hx_3 = a+b$. La bijection θC envoie tous les mots de $\alpha^{-1} h \cap \mathcal{V}$ sur les mots de $\alpha^{-1} h \cap \mathcal{W}$. La relation (10.2.8) pour un tel h va nous donner de nouveau une démonstration explicite de l'identité (10.4.1).

Soit $f \in \alpha^{-1} h \cap \mathcal{V}$. Posons

$$\nu_{x_1, x_2} f = c+k$$

où k est un entier ; les relations (10.2.9) entraînent alors

$$k \geqslant \max\{-a, -b, -c\}$$

et

$$\nu_{x_2, x_3} f = a+k \quad \text{et} \quad \nu_{x_3, x_1} f = b+k.$$

Ainsi le nombre de mots f de $\alpha^{-1}h \cap \mathcal{V}$ tels que

$$\nu_{x_1, x_2} f = c + k$$

est donné par

$$\binom{b+c}{c+k}\binom{c+a}{a+k}\binom{a+b}{b+k} .$$

D'autre part si $\nu_{x_1, x_2} f = c + k$, alors

$$\nu f = b + c + \nu_{x_2, x_3} f = a + b + c + k .$$

Ainsi

$$\sum\{z^{\nu f} : f \in \alpha^{-1}h \cap \mathcal{V}\} = \sum_k \binom{b+c}{c+k}\binom{c+a}{a+k}\binom{a+b}{b+k} z^{a+b+c+k} .$$

D'autre part, d'après les relations (10.2.10) nous avons, en posant $n_{12} f = c - n$,

$$n_{23} f = a - n , \qquad n_{13} f = b - n$$

$$n_{123} f + n_{132} f = 2n \quad \text{et} \quad 0 \leqslant n \leqslant \min\{a , b , c\} .$$

D'où, d'après (10.2.11), l'expression de ξf pour un mot

$$f \in \alpha^{-1}h \cap \mathcal{W} ,$$

tel que $n_{12} f = c - n$ et $n_{132} f = k$, à savoir

$$\xi f = a + b + c + n - k \qquad (0 \leqslant k \leqslant 2n) .$$

Un mot $f \in \mathcal{W} \cap \alpha^{-1}h$ tel que $n_{12} f = c - n$ a exactement $a + b + c + 3n - 2n = a + b + c + n$ mots de $\mathcal{S}_1$ dans sa factorisation (en mots de $\mathcal{S}_1$). Le nombre de mots $f \in \mathcal{W} \cap \alpha^{-1}h$ tels que $n_{12} f = n + c$ et $n_{132} f = k$ est alors

$$\frac{(a + b + c + n) !}{(a-n)!\ (b-n)!\ (c-n)!\ k!\ (2n-k)!} .$$

De là

$$\sum\{z^{\xi f} : f \in \alpha^{-1}h \cap \mathcal{W}\} = \sum_n \frac{(a + b + c + n)!}{(a-n)!\ (b-n)!\ (c-n)!\ (2n)!} z^{a+b+c-n} (z+1)^{2n} .$$

D'où la relation

$$\sum_k \binom{b+c}{c+k}\binom{c+a}{a+b}\binom{a+b}{b+k} z^{a+b+c+k} =$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} \frac{(a+b+c-n)!}{(a-n)!\ (b-n)!\ (c-n)!\ (2n)!}\ z^{a+b+c-n}\,(z+1)^{2n} \qquad (10.4.2)$$

où $-\min\{a\ ,\ b\ ,\ c\} \leqslant k \leqslant \min\{a\ ,\ b\ ,\ c\}$ et $0 \leqslant n \leqslant \min\{a\ ,\ b\ ,\ c\}$.

Pour $z = -1$, on retrouve l'identité (10.4.1) de Fjeldstad, car le seul terme de la somme en n qui ne disparaît pas est celui qui correspond à $n = 0$.

Pour $z = 1$, nous obtenons

$$\sum_k \binom{b+c}{c+k}\binom{c+a}{a+k}\binom{a+b}{b+k} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(a+b+c-n)!}{(a-n)!\ (b-n)!\ (c-n)!\ (2n)!}\ 2^{2n} \qquad (10.4.3)$$

D'autres identités pourraient être déduites de la proposition 10.1. En particulier, pour un certain h on peut écrire

$$\sum\{\nu f : f \in \alpha^{-1} h \cap \mathcal{V}\} = \sum\{\xi f : f \in \alpha^{-1} h \cap \mathcal{W}\}$$

ou encore

$$\sum_{k\geqslant 0} k.\ \textbf{card}\ (\nu^{-1} k \cap \alpha^{-1} h \cap \mathcal{V}) = \sum_{k\geqslant 0} k.\ \textbf{card}\ (\xi^{-1} k \cap \alpha^{-1} h \cap \mathcal{W})$$

et en déduire d'autres identités.

Signalons pour terminer que de Bruijn ([6] p. 72) donne la forme asymptotique de l'expression

$$S(s\ ,\ n) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{k+n} \binom{2n}{k}^s .$$

Celle-ci contient un facteur de la forme $(\cos \pi/2s)^{2ns}$; cette quantité n'étant rationnelle que si $s = 2$ ou 3 ($s = 3$ formule de Dixon) et pour $s > 3$ n'apparaissant pas dans la formule de Stirling, il remarque qu'il n'existe pas de généralisation simple de la formule de Dixon pour $s > 3$, hypothèse qui est d'ailleurs confirmée lorsqu'on veut appliquer les méthodes de ce chapitre pour un ensemble $\mathcal{X}$ de cardinalité > 3.

Liste des principaux symboles utilisés

		§	n°
$\mathfrak{X}$	étant un ensemble non vide, on désigne par		
$\mathfrak{X}^*$	le monoïde engendré par $\mathfrak{X}$	2	1
$f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$	un élément ou *mot* de $\mathfrak{X}^*$	2	1
λf	la longueur du mot $f \in \mathfrak{X}^*$	2	1
1	le mot vide de $\mathfrak{X}^*$ (élément unité)	2	1
$\mathfrak{X}^{*+}$	$\mathfrak{X}^{*+} = \mathfrak{X}^* - \{1\}$	2	1
$\mathfrak{X}_n^*$	le sous-ensemble des mots de $\mathfrak{X}^*$ de longueur n $(n \geqslant 0)$	2	1
P et **L**	les applications de $\mathfrak{X}^{*+}$ dans $\mathfrak{X}$ qui au mot $f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} \in \mathfrak{X}^{*+}$ font correspondre ses première et dernière lettres, resp. ($\mathbf{P} f = x_{i_1}$; $\mathbf{L} f = x_{i_r}$)	2	1
$\overline{\mathfrak{X}}^*$	le monoïde abélien libre engendré par $\mathfrak{X}$	2	2
α	l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{X}^*$ sur $\overline{\mathfrak{X}}^*$	2	2
$\overline{\mathfrak{X}}^{*+}$	$\overline{\mathfrak{X}}^{*+} = \alpha \mathfrak{X}^{*+}$	2	2
$\overline{\mathfrak{M}}$	sous-ensemble des mots *multilinéaires* de $\overline{\mathfrak{X}}^*$	2	2
$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{M} = \alpha^{-1} \overline{\mathfrak{M}}$	2	2
$\mathfrak{X}$	étant un ensemble totalement ordonné, on désigne par		
$\beta' h$	le mot *non décroissant* de la classe abélienne $\alpha^{-1} h$ $(h \in \overline{\mathfrak{X}}^{*+})$	2	3
β	$\beta = \beta' \alpha$	2	3
γ_k $(k > 0)$	l'application $\gamma_k : \mathfrak{X}^* \longrightarrow \mathbf{N}$ telle que $\gamma_k f$ est 0 si $\lambda f < k$ et est égal au nombre de lettres égales à x_{i_k} dans le facteur initial $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ si $\lambda f \geqslant k$ et $f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$	2	3

		§	n°
$\mathfrak{X}$	étant un ensemble quelconque et Ω un anneau commutatif (unitaire), on désigne par		
$\mathfrak{A} = \Omega[[\mathfrak{X}^*]]$	l'algèbre large du monoïde $\mathfrak{X}^*$ relative à Ω ..	2	4
$\bar{\mathfrak{A}} = \Omega[[\bar{\mathfrak{X}}^*]]$	l'algèbre large du monoïde abélien libre $\bar{\mathfrak{X}}^*$ relative à Ω	2	4
$\sum\{faf : f \in \mathfrak{X}^*\}$	une série formelle de $\mathfrak{A}$	2	4
$X_1, X_2, \ldots, X_n$	les n *indéterminés* de $\bar{\mathfrak{X}}^*$ si $\mathfrak{X}$ est fini $= \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $(n > 0)$	2	4
o	l'*ordre* d'une série formelle	2	4
$\mathfrak{X}$	étant un ensemble totalement ordonné, on désigne par		
τ	une opération associative définie sur $\mathfrak{X}^*$	3	2
$\mathfrak{X}^*_\tau$	le monoïde d'*intercalement* $(\mathfrak{X}^*, \tau)$	3	2
ζ	$\zeta : \mathfrak{M} \longrightarrow \{+1, -1\}$	3	3
b	$b : \mathfrak{X}^2 \longrightarrow \Omega$	3	3
ν	$\nu : \mathfrak{X}^* \longrightarrow \Omega$	3	3
$\Omega[[\mathfrak{X}^*_\tau]]$	l'algèbre large du monoïde d'intercalement, relative à Ω	3	3
$\bar{\nu}$	$\bar{\nu} : \bar{\mathfrak{X}}^* \longrightarrow \Omega$	3	4
$\bar{\mu}$	$\bar{\mu} : \bar{\mathfrak{X}}^* \longrightarrow \Omega$	3	4
$\mathfrak{X}$	étant un ensemble quelconque $(\neq \emptyset)$, on désigne par		
θ	$\theta : \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}^*$, une bijection	4	2
	et on définit pour $h \in \mathfrak{X}^{*+}$,		
dim h, E(h), N(h), G(h)	.....	4	2
e	$e : G(h) \longrightarrow E(h)$	4	2
δ	$\delta : \mathfrak{Y}^* \longrightarrow \mathfrak{Y}^*$	4	3
$\underline{\delta}$ et $\bar{\delta}$	$\delta y = \underline{\delta} y \,.\, \bar{\delta} y$ $(y \in \mathfrak{Y})$	4	3
τ''	$\tau'' : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$	4	4
τ'	$\tau' : \theta^{-1} \tau'' \theta$	4	4
τ'_p et τ_p	$(p \geqslant 1)$ des opérateurs de $\theta^{-1}\mathfrak{M}$ dans lui-même	4	4
T	un monoïde d'opérateurs de $\theta^{-1}\mathfrak{M}$ dans lui-même	4	4

Pour les notations qui suivent, $\mathfrak{X}$ est un ensemble totalement ordonné et l'on utilise les symboles :

		§	n°
π	$\pi : \alpha^{-1}\ h \longrightarrow E(h)$, une bijection	4	5
ρ	$\rho = \pi^{-1} e : G(h) \longrightarrow \alpha^{-1}\ h$	4	5
U_f	$U_f = \rho^{-1} \cap (\theta^{-1}\mathfrak{M})^*$ $(f \in \mathfrak{X})^*$	4	5
$\mathfrak{S}_0$	un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathfrak{M}$	4	5
$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{S} = \theta^{-1}\ \mathfrak{S}_0$	4	5
$\mathfrak{C}$	ensemble des mots *canoniques* de $\mathfrak{Y}^*$	4	5
$\circ$	une opération associative définie sur $\mathfrak{C}$	4	5
C	$C : \mathfrak{X}_1^* \longrightarrow \mathfrak{C}$ (isomorphisme)	4	5
η	$\eta : \mathfrak{C} \longrightarrow \{+1 , -1\}$	4	6
$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{T} = C\mathfrak{M} \subset \mathfrak{C}$	4	6
$\{Y_j : j \in J\}$	une famille de sous-ensembles de $\mathfrak{X}^{*+}$ où J est totalement ordonné	5	2
$(\mathfrak{H}, \leqq)$	un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathfrak{X}^{*+}$	5	2
$\mathfrak{K}_0$	$\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{H}$	5	3
$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{K} = \theta^{-1}\mathfrak{K}_0$	6	1
δ'	$\delta' : \mathfrak{Y} \times \theta^{-1}\mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{Y}^*$	6	2
(δ'_p) $(p > 0)$	famille d'opérateurs de $\mathfrak{Y}^*$ dans lui-même	6	2
Δ'	Monoïde d'opérateurs engendré par les δ'_p	6	2
$\mathfrak{K}_1$	$\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{Y}^*$	6	2
ψ	$\psi : \mathfrak{X}^* \longrightarrow \mathfrak{K}_1$ (bijection)	6	2
χ	$\chi : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{K}_1$ (bijection)	6	2
Φ	$\Phi = \psi^{-1}\chi\, C$ permutation de $\mathfrak{X}^*$	6	2
ν et ξ	des applications de $\mathfrak{X}^*$ dans $\mathbf{N}$	6	3
$\nu_{x,x'}$ et $\xi_{x,x'}$ $(x, x' \in \mathfrak{X}^2)$	des applications de $\mathfrak{X}^*$ dans $\mathbf{N}$	6	3
$D = D(\mathfrak{X})$	le système algébrique à une seule opération binaire sur $\mathfrak{X}$, notée [ ]	7	1
δ^*	$\delta^* : D^* \longrightarrow \mathfrak{X}^*$ (décomposition)	7	1
σ	$\sigma : D \longrightarrow J$ (J totalement ordonné)	7	2
H, H_0, H_1	des ensembles tels que $\mathfrak{X} \subset H \subset H_0 \subset H_1 \subset D^*$	7	2

		§	n°
θ	$\theta : \mathfrak{X}^* \longrightarrow J$ (surjection) -utilisée seulement dans le chapitre 7	7	2
$\mathcal{B}$	$\mathcal{B} \subset \mathfrak{X}^*$	7	2
$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$ ensemble des mots *primitifs* de $\mathfrak{X}^*$	7	2
$\mu_{x,x'}$ $((x, x') \in \mathfrak{X}^2)$	famile d'applications de $\mathfrak{X}^*$ dans $\mathbf{N}$.	8	2
φ	une permutation de $\mathfrak{X}^*$	8	3
$\varepsilon_{p,l}$ et $c_{p,l}$	.....	8	3
$X_1, X_2, \ldots, X_n$	une suite de variables aléatoires	9	1
$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$	la statistique d'ordre de la suite $X_1, X_2, \ldots, X_n$.	9	1
U , V	des applications de $\mathfrak{X}_n^*$ dans Ω	9	3
S , T	des applications de $\mathfrak{X}_n^*$ dans $\mathbf{R}$, lorsque $\mathfrak{X}=\mathbf{R}$.	9	3
$(\tau_f)_{f \in \mathfrak{X}_n^*}$	famille de bijections de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_n$	9	3
$\mathcal{Y}$	$\mathcal{Y} = \mathfrak{X} \times \mathbf{N}$ (notation seulement utilisée dans le chapitre 9)	9	3
$\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$	$\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ des sous-ensembles de $\mathfrak{X}^*$	10	2

Références

[1] ANDERSEN (E. Sparre). - The equivalence principle in the theory of fluctuations of sums of random variables, *Colloquium on Combinatorial Methods in Probability Theory*, [Août 1-10, 1962]. Aarhus Universitet Matematisk Institut, 13-16.

[2] ATKINSON (F.V.). - Some aspects of Baxter's functional equation, *J. Math. Anal. Appl.*, *7* (1963), 1-30.

[3] BARTON (D.E.) & MALLOWS (C.L.). - The randomization bases of the problem of the amalgamation of weighted means, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, *23* (1961), 423-433.

[4] BAXTER (G.). - An analytic approach to finite fluctuation problems in probability, *J. Analyse Math.*, *9* (1961), 31-70.

[5] BAXTER (G.). - An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity, *Pacific J. Math.*, *10* (1960), 731-742.

[6] de BRUIJN (N.G.). - *Asymptotic Methods in Analysis*. North-Holland Publ. Co., Amsterdam (1958).

[7] BRUNK (H.D.). - A generalization of Spitzer's Combinatorial Lemma, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, *2* (1964), 395-405.

[8] CHEN (K.T.), FOX (R.H.) & LYNDON (R.C.). - Free differential calculus IV. The quotient groups of the lower central series, *Ann. of Math.*, *68* (1958), 81-95.

[9] DIXON (A.C.). - On the sum of the cubes of the coefficients in a certain expansion by the binomial theorem, *Messenger of Math.*, *20* (1890), 79-80.

[10] EASTMAN (W.L.). - On the construction of comma-free codes. Research Report SRRC-RR-64-27, Sperry Rand Research Center, Sudbury, Mass. (1964).

[11] FJELDSTAD (J.E.). - A generalization of Dixon's formula, *Math. Scand.*, *2* (1954), 46-48.

[12] FOATA (D.). - Un theorème combinatoire non commutatif, *C.R. Acad. Sc. Paris, 258* (1964), 5128-5130.

[13] FOATA (D.). - Sur un énoncé de Mac Mahon, *C.R. Acad. Sc. Paris, 258* (1964), 1672-1675.

[14] FOSTER (F.G.) & STUART (A.). - Distribution free test in time series bases on the breaking of records, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 16* (1954), 1-13.

[15] GOOD (I.J.). - A short proof of Mac Mahon's "Master Theorem", *Proc. Cambridge Philos. Soc., 58* (1962), 160.

[16] GOOD (I.J.). - Generalizations to several variables of Lagrange's expansion with applications to stochastic processes, *Proc. Cambridge Philos. Soc., 56* (1960), 367-380.

[17] GOOD (I.J.). - Proofs of some "binomial" identities by means of Mac Mahon's "Master Theorem", *Proc. Cambridge Philos. Soc., 58* (1962), 161-162.

[18] HALL (Marshall Jr.). - *A survey of Combinatorial Analysis, Survey in Applied Mathematics, IV.* John Wiley, New York (1958), 35-104.

[19] HALL (Marshall Jr.). - *The theory of Groups.* Mac Millan, New York (1959), chapitre 11.

[20] HARDY (G.H.), LITTLEWOOD (J.E.) & PÓLYA (G.). - *Inequalities.* Cambridge University Press, Cambridge (1959).

[21] KINGMAN (J.F.C.). - Spitzer's identity and its use in probability theory, *J. London Math. Soc., 37* (1962), 309-316.

[22] KUROŠ (A.G.). - Neassociativnye svobodnye algebry i svobonye proizvedenija algebr (Algèbres non associatives libres et produits libres d'algèbres), *Mat. Sbornik, 20 (62)* (1947), 239-262.

[23] LJUNGGREN (W.). - Et elementaert bevis for en formel av A.C. Dixon, *Nordisk Mat. Tidsskr., 29* (1947), 35-38.

[24] LUCAS (E.). - *Théorie des nombres.* Gauthier-Villars, Paris (1891).

[25] LYNDON (R.C.). - On Burnside's problem, I, *Trans. Amer. Math. Soc., 77* (1954), 202-215.

[26] LYNDON (R.C.) & SCHÜTZENBERGER (M.P.). - The equation $a^M = b^N c^P$ in a free group, *Michigan Math. J., 9* (1962), 289-298.

[27] MAC MAHON (P.A.). - *Combinatory Analysis, 1.* Cambridge University Press (1915).

[28] MEIER-WUNDERLI (H.). - Note on a basis of P. Hall for the higher commutators in free groups, *Comment. Math. Helvetici, 26* (1952), 1-5.

[29] NANJUNDIAH (T.S.). - On a formula of A.C. Dixon, *Proc. Amer. Math. Soc., 9* (1958), 308-311.

[30] POLLACZEK (F.). - Fonctions caractéristiques de certaines répartitions définies au moyen de la notion d'ordre. Application à la théorie des attentes, *C.R. Acad. Sc. Paris, 234* (1952), 2334-2336.

[31] RÉNYI (A.). - Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations, *Colloquium on Combinatorial Methods in Probability Theory*, [Août 1-10, 1962]. Aarhus Universitet Matematisk Institut, 104-115.

[32] RICHMOND (H.W.). - The Sum of the cubes of the coefficients in $(1 - x)^{2n}$, *Messenger of Math., 21* (1892), 77-78.

[33] RIORDAN (J.). - *An Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley, New York (1958).

[34] SCHÜTZENBERGER (M.P.). - On a factorisation of free monoids, *Proc. Amer. Math. Soc., 16* (1965), 51-54.

[35] SCHÜTZENBERGER (M.P.). - Sur une propriété combinatoire des algèbres de Lie libres pouvant être utilisée dans un problème de Mathématiques Appliquées. Séminaire P. Dubreil (Algèbre et Théorie des Nombres), exposé n° 1, Faculté des Sciences de Paris (1958).

[36] SHERMAN (S.). - Fluctuation and Periodicity, *J. Math. Anal. Appl., 9* (1964), 468-476.

[37] ŠIRŠOV (A.I.). - O svobodnyh kol'cah Li (Sur les anneaux de Lie libres), *Mat. Sbornik, 45* (1958), 113-122.

[38] SPITZER (F.). - A combinatorial lemma and its applications to Probability Theory, *Trans. Amer. Math. Soc., 82* (1956), 323-339.

[39] STAVER (Tor B.). - Om summasjon av potenser av binomialkoeffisientene, *Nordisk Mat. Tidsskr., 29* (1947), 97-103.

[40] SZÉP (J.). - Sui gruppi fattorizzabili, *Atti del Convegno sulla teoria dei gruppi finiti* [11-13 Aprile 1960], Firenze, 20-30.

[41] WENDEL (J.G.). - Spitzer's formula : a short proof, *Proc. Amer. Math. Soc., 9* (1958), 905-908.

Institut de Mathématiques
Faculté des Sciences de Lille
Lille

adresse actuelle : *Département de Mathématique*
Université de Strasbourg
Strasbourg

Reçu le 10 mars 1965

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

"LES SPINEURS"

Vu et approuvé :
Paris, le 26 Février 1965
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Marc ZAMANSKY

Vu
et Permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie
de Paris,
Jean ROCHE

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
Ouvrages scientifiques
TYPO-OFFSET
GAP (Hautes-Alpes)
Dépôt légal n° 5
1966